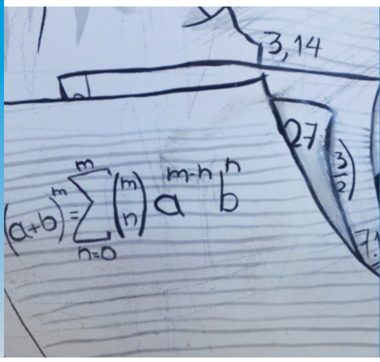
Integración a la Cultura Académica (ICA)
Profesorado y Licenciatura en Matemática
Matemática Discreta

2021

Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

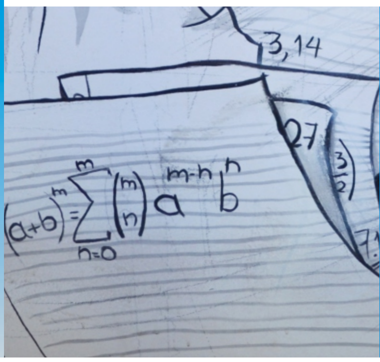
www.exa.unrc.edu.ar



Integración a la Cultura Académica (ICA)
Prof. y Lic. en Matemática
Matemática Discreta

Responsables ingreso 2021
Patricia Konic
Ana Bovio
Carolina Bollo

Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales



¿Cómo leer este material?

A lo largo del material encontrarán los siguientes iconos:

Actividad
Tareas, consignas, situaciones problemáticas.

Interrogantes
Preguntas, planteos, para reflexionar.

Observación
Datos que explican o aclaran un tema.

Proc. Temporales
Sucesos históricos.

Importante
Tener en cuenta, destacar, recordatorio, atención.

Ejemplo
Casos.

Curiosidades
Detalles curiosos sobre la temática.

Bibliografía
Lectura sugerida

Este material ha sido elaborado en el marco del Programa de Ingreso, Continuidad y Egreso de Estudiantes en las carreras de pregrado y grado de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Res. Rec 380/15) y el proyecto Mediación de Materiales de Ingreso para las Carreras de la UNRC 2017-2019 “La Valoración Continua para Fortalecer los Procesos Educativos”. (Res. Rec 785/17). UNRC- Secretaría Académica.

Contenido

El pensamiento matemática hoy…

Tal como señala Guzmán (2007), en nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante tiene mayor valor hacer acopio de procesos de pensamientos útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó "ideas inertes", ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente.

Esto, pensado en un mundo de transformaciones permanentes y vertiginosas, lleva a preocuparnos por intentar generar en el estudiante procesos de pensamiento que eviten transformarse prontamente en obsoletos e ineficaces.

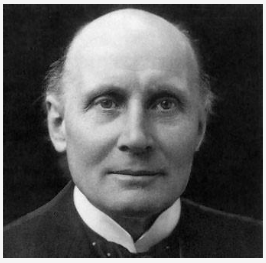
El conocimiento matemático y por ende los procesos del pensamiento matemático se hallan en la actualidad en el centro de la educación matemática. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina sobre el contenido. Por ello se concede gran importancia al estudio de las cuestiones que se refieren a las prácticas derivadas de los procesos de resolución de problemas.

En tal sentido, una de las tendencias más difundidas consiste en fortalecer la adquisición de procesos de pensamiento propios de la matemática, más que en la simple transferencia de contenidos.

En este curso, comenzaremos proponiendo un acercamiento inicial al pensamiento matemático presentando algunos interesantes problemas que, a través de las propuestas de resolución de cada uno de los participantes, el debate en grupos y la comunicación compartida, posibilitará una mejor comprensión de la "esencia" del trabajo presente en los procesos de pensamiento matemático. En particular trabajaremos con aquellos que estén especialmente ligados a la introducción al álgebra y a la matemática discreta.

Con ello trataremos de estimular en principio la búsqueda autónoma, descubrimiento paulatino de procedimientos y estructuras matemáticas sencillas en problemas que posibilitan su emergencia.

Nos proponemos poner en evidencia procesos propios de la matemática como detectar de regularidades, formular ejemplos y contraejemplos, agotamiento de posibilidades, inducir, conjeturar, generalizar entre otros.



(Whitehead Ramsgate, 1861 - Cambridge, Massachusetts, 1947) Filósofo y matemático inglés. Fue profesor en la University College de Londres, en el Imperial College of Science and Technology de Kensington y en el Trinity College de Cambridge. Desempeñó, también, importantes cargos administrativos y pedagógicos, cuya experiencia recogió en la obra Los fines de la educación y otros ensayos (1924). En 1924 enseñó en Harvard, donde influyó sobre G. H. Mead, Dewey, Quine y, en general, sobre el neorrealismo americano.

Los problemas a los que hacemos referencia en esta página, serán proporcionados en clase.

Volver

¿Por qué estudiar Matemática Discreta?

Para comenzar, nos preguntaremos ¿Qué significado se le otorga a la palabra discreta?

Esta área de la matemática estudia objetos que no tienen relación continua, objetos enteros no divisibles por los cuales no hay trozos o casos intermedios, por tanto, nos alejamos de los números racionales o irracionales y nos centramos en números enteros y objetos que puedan ser descriptos mediante números enteros.

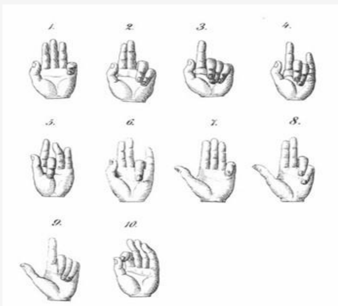
La matemática discreta es la matemática que estudia estructuras inconexas, cuyos elementos pueden contarse uno a uno. Es decir, los procesos en matemáticas discretas son contables donde se trabaja con conjuntos finitos o, con conjuntos infinitos numerables, como el conjunto de los números naturales.

En el mundo real, en muchas de las situaciones existen variables que varían de forma continua, pero otras magnitudes tienen un número finito o infinito numerable de estados o condiciones. La humanidad siempre ha intentado modelar el mundo que le rodea mediante estructuras que intentan imitar a la naturaleza, y es por ello que la matemática discreta es la base de múltiples estructuras.

La matemática discreta proporciona las bases matemáticas a las ciencias de la computación, aporta el sustrato esencial para resolver problemas de investigación operativa que incluyen muchas técnicas discretas de optimización. Además, tiene aplicaciones en ingeniería en general, en química, botánica, zoología, lingüística, geografía, ciencias empresariales e internet. Podríamos afirmar que esta rama del saber contribuye al desarrollo del pensamiento matemático.

La matemática discreta responde a preguntas del tipo, ¿Cuál es la probabilidad que nos toque la lotería? ¿Cuál es el camino más corto entre dos ciudades dentro de una red de rutas de un país? ¿Cuántas disposiciones pueden mantener un rey, un alfil y un caballo? ¿Cuál es la manera más eficiente de construir un submarino nuclear?

Forman parte de esta asignatura modos de razonamiento matemáticos como la inducción, métodos de conteo combinatorio, relaciones, recurrencias, teoría de conjuntos, grafos, aritmética modular o teoría de números.



La combinatoria trata de contar el número de maneras en que unos objetos dados pueden organizarse de una determinada forma.

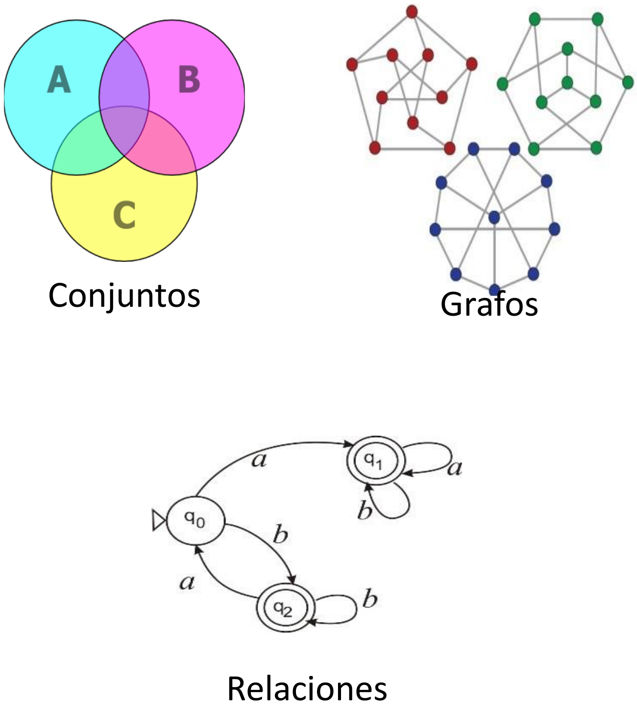


Fig. 1. Contenidos que se trabajan en matemática discreta

Ahora bien, no podemos pensar el desarrollo del pensamiento matemático sin la presencia de un razonamiento lógico. El razonamiento lógico se emplea en matemática para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si los programas son correctos o no, en las ciencias físicas y naturales, para obtener conclusiones de experimentos; en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una increíble cantidad de problemas, entre otras cosas. Por ello es que, en este espacio curricular, seguiremos el camino planteado inicialmente desarrollando algunos elementos básicos y esenciales que nos provee la Lógica proposicional y la Lógica de primer orden.

El desarrollo de los contenidos que siguen se han tomado del material del ingreso 2016 desarrollado por María Elena Markiewicz.

Volver

1. ¿Qué estudia la lógica?

En el lenguaje humano se hace uso constantemente de **argumentos** o **razonamientos**.

Veamos un par de ejemplos de lo que se considera un **razonamiento**:

(1) Si llueve, voy al cine. Pero no llueve. Por lo tanto, no voy al cine.

(2) Todo hombre es mamífero. Todo mamífero es vertebrado. Luego, todo hombre es vertebrado.

En ambos casos, estamos ante la presencia de **un conjunto de oraciones o proposiciones que se relacionan de una manera especial**.

En el ejemplo (1), a partir de ciertas oraciones iniciales, como son: *"Si llueve, voy al cine"* y *"no llueve"* se desprende una nueva oración: *"no voy al cine"*.

Del mismo modo, en (2), la palabra "luego" parece indicar que la proposición: *"Todo hombre es vertebrado"* se deriva o desprende de anteriores.

En general, podemos decir que:

> Un razonamiento es un conjunto de oraciones o proposiciones de las cuales se afirma que una de ellas se deriva de las otras.

El empleo de razonamientos tiene lugar tanto en la vida cotidiana, como en las tareas científicas, y, en este sentido, es de suma importancia poder determinar si un razonamiento es correcto o incorrecto (o, lo que es lo mismo, si es válido o no).

Ahora bien, como veremos más adelante, la validez de un razonamiento tiene más que ver con la "forma" o "estructura" que tiene un razonamiento, que con el contenido particular del que trata.

Por ejemplo, ¿qué "forma" tendrá el razonamiento presentado en (1)?

Si representamos la oración: "*Llueve*" por el símbolo A y la oración "*voy al cine*" por el símbolo B, resultaría la siguiente forma o esquema de razonamiento:

(1) Si A entonces B. Pero no A. Por lo tanto, no B.

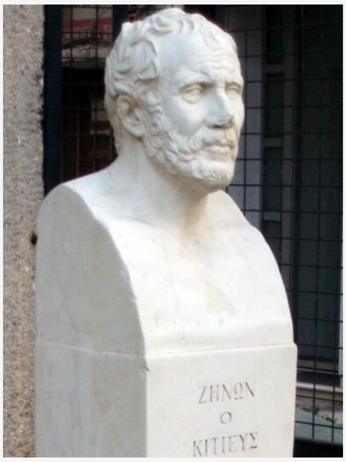
En el ejemplo (2), representando a P, Q y R por "*hombre*", "*mamífero*" y "*vertebrado*" respectivamente, resultaría el siguiente esquema de razonamiento:

(2) Todo P es Q. Todo Q es R. Luego, todo P es R.

Es justamente esta "forma" o "estructura" del razonamiento (y no su contenido) lo que determina su validez o invalidez.

Desde hace dos mil quinientos años, los filósofos griegos desde Aristóteles y los estoicos se preocuparon en analizar la forma o estructura de los argumentos, dejando de lado su materia o contenido. De este modo nace la **lógica formal**, como una **ciencia que tiene por objeto el análisis formal de los razonamientos.**

El desarrollo de la Lógica aporta en la actualidad herramientas muy útiles para trabajar en diversos ámbitos científicos.



Zenón de Citio, fundador del estoicismo.

Más información en: http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esoetica/quincena3/quincena3_contenidos_6.htm

Volver

2. Hacia la construcción de un lenguaje formal

Anteriormente mencionamos que la lógica estudia los **razonamientos**, y que uno de sus objetivos principales es la **determinación de la validez o invalidez de los mismos**.

También adelantamos que el hecho de que un razonamiento sea válido (o correcto) depende de la “forma” o “estructura” del mismo, y no del contenido o la materia de que trata.

Para captar la forma de los razonamientos expresados en lenguaje natural, desde la Lógica se recurre a un lenguaje artificial que modeliza la estructura de los razonamientos, evidenciando las relaciones entre las proposiciones que intervienen en él y eliminando, a su vez, las ambigüedades y confusiones que presenta el lenguaje natural.

A continuación, vamos a comenzar a introducirnos en este lenguaje específico, explicitando algunos de los símbolos que forman parte de dicho lenguaje.

2.1. Las letras enunciativas o variables proposicionales

Hemos dicho que los razonamientos están compuestos por proposiciones, pero ¿a qué se considera una proposición?

Por ejemplo, una frase como “3 divide a 7”, que tiene un sentido completo y de la cual uno puede decir si es verdadera o falsa, es una **proposición**.

Una **Proposición** es una oración de la cual tiene sentido preguntarse si es verdadera o falsa.

Analicemos los siguientes casos:

Río Cuarto es la capital de la provincia de Córdoba

La Tierra es el único planeta del universo que tiene vida.

Los números pares.

¿Para qué respiramos?

Las dos primeras oraciones constituyen proposiciones. La primera es una proposición verdadera. La segunda puede ser verdadera o falsa, aunque nadie lo sabe hasta el momento.

La dos últimas no son proposiciones, ya que no tiene sentido plantearse si son verdaderas o falsas.

En general, las oraciones interrogativas, exclamativas e imperativas no son proposiciones.

En el lenguaje de la lógica, se utilizan las letras minúsculas **p**, **q**, **r**, etc. para representar proposiciones. A estas letras se las denomina **Letras enunciativas** o **Variables proposicionales**.

Por ejemplo, podemos usar la letra "p" para representar la proposición "*Río Cuarto es la capital de la provincia de Córdoba*" y esto lo indicamos de la siguiente manera:

p: *Río Cuarto es la capital de la provincia de Córdoba*

2.2. Los juntores

Dadas dos proposiciones, es posible combinarlas o componerlas mediante partículas tales como "y", "o", y otras similares, para formar nuevas proposiciones que se denominarán **compuestas** o **moleculares**.

Por ejemplo, a partir de las dos proposiciones siguientes:

"Está lloviendo" "Llevaré mi paraguas"

Podemos formar las proposiciones compuestas:

*"Está lloviendo **y** llevaré mi paraguas"*,

*"**Si**esta lloviendo **entonces** llevaré mi paraguas"*,

*"**No** llevaré mi paraguas"*

En el lenguaje de la lógica, también se utilizan símbolos especiales para representar las partículas "**no**", "**y**", "**o**", "**si…entonces**…", "**si y sólo si**", que hacen de nexo entre proposiciones. Estos símbolos reciben el nombre de **Operadores lógicos** o **Juntores**.

A continuación, vamos a examinar en detalle cada uno de ellos.

2.2.1. Negador

La partícula "**no**" del lenguaje natural es representada en el lenguaje de la lógica por el símbolo $\neg$. Este símbolo recibe el nombre de "**negador**".

Al anteponer el negador a una expresión como, por ejemplo, a la letra enunciativa p, obtenemos otra expresión que es la negación de esta: **¬p**, que se lee como "**no p**" o "**no es cierto p**".

El negador tiene el mismo significado que la partícula "no" del lenguaje natural.

En el lenguaje natural, si la proposición "*Está lloviendo*" es verdadera, entonces la proposición: "*No está lloviendo*" será falsa; en cambio, si la primera es falsa, la segunda es verdadera.

Del mismo modo, **si p toma el valor verdadero, ¬p tomará el valor falso; y si p toma el valor falso, ¬p resultará verdadero.**

Esta situación puede describirse esquemáticamente mediante la siguiente tabla:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 1. Tabla de valores de verdad de la negación

La primera columna recoge los posibles valores de verdad (o estados) que pueden ser asignados a la letra enunciativa p (Verdadero o Falso). La segunda columna indica los valores de verdad que tomará su negación en cada caso.

"V" y "F" son abreviaturas de "verdadero" y "falso", respectivamente. En contextos computacionales, generalmente se utilizan las expresiones "true" y "false".

2.2.2 Conjuntor

El símbolo $\wedge$ recibe el nombre de **conjuntor**, y representa la partícula "**y**" del lenguaje natural.

La combinación de dos expresiones, por ejemplo, de dos letras enunciativas: p, q, mediante el conjuntor es la **conjunción** de ellas: "**p$\wedge$q**", que se lee: "p y q".

Las componentes de una conjunción (en este caso p y q) se denominan usualmente **conyuntos**.

El significado del conjuntor es similar al del "y" en lenguaje natural.

Por ejemplo, la proposición "*Llueve y hace frío*" será verdadera si las dos proposiciones que la componen, es decir, tanto la proposición "*Llueve*" como la proposición "*Hace frío*" son ambas verdaderas. Si, en cambio, alguna de ellas (o las dos) fuese falsa, la proposición "**Llueve y hace frío**" sería falsa.

Así, la conjunción **p∧q** será verdadera sólo en el caso de que ambos componentes p y q sean verdaderos. En los demás casos (es decir, cuando alguno o ambos componentes sea falso), la conjunción es falsa.

Esto se puede expresar mediante una tabla análoga a la expuesta para el negador. Sólo que, en este caso, como intervienen dos proposiciones, p y q, habrá cuatro posibles combinaciones de valores de verdad, y por lo tanto la tabla constará de cuatro filas:

p	q	**p ∧ q**
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 2. Tabla de valores de verdad de la conjunción

En la primera fila estamos diciendo que, si tanto p como q toman el valor V, la conjunción de ambas, también será V.

En la segunda fila estamos indicando que, si p toma el valor V y q el valor F, la conjunción será F.

En la última fila estamos diciendo que, si p y q toman ambas el valor F, la conjunción también será F.

Debemos aclarar que el símbolo ∧ no sólo representa la partícula "y". Palabras tales como "pero" y "aunque" también se interpretan del mismo modo.

Así, si representamos:

p: *Llueve*

q: *Hace calor*

Las proposiciones siguientes:

Llueve y hace calor.

Llueve pero hace calor.

Llueve aunque hace calor.

Se representan de la forma: **p ∧ q.**

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que no siempre la partícula "y" hace referencia a una conjunción. Observemos estos dos ejemplos:

Consideremos esta proposición: "*Juan y Pedro son abogados*". Esta es una forma resumida de afirmar: "*Juan es abogado y Pedro es abogado*", por lo que la partícula "y" si puede representarse por el conjuntor.

Pero si consideramos esta otra proposición: "*Juan y Pedro son hermanos*". Aquí el "y" no está haciendo referencia a una conjunción, sino que solamente se usa para expresar una relación entre ambos. Es otra forma de expresar la proposición: "*Juan es hermano de Pedro*".

2.2.3. Disyuntor

El símbolo ∨ recibe el nombre de **disyuntor**, y representa a la partícula "o" del lenguaje natural.

La combinación de dos expresiones, por ejemplo, de las letras enunciativas: p, q, mediante el disyuntor es otra expresión que corresponde a la **disyunción** de ellas:

"**p∨ q**", que se lee: "p o q".

Las componentes de una disyunción (en este caso p y q) se denominan usualmente **disyuntos**.

El significado del disyuntor es similar al del "o" en lenguaje natural.

Cuando decimos, por ejemplo,"*2 es par o 3 es par*", estamos en presencia de una proposición verdadera, ya que al menos una de las dos proposiciones que la componen es verdadera (en este caso, la proposición "*2 es par*").

También se considera verdadera la proposición "*2 es par o 4 es par*", donde ambas proposiciones son verdaderas.

En cambio, la proposición: "*3 es par o5 es par*", es falsa, ya que ambas componentes son falsas.

Así, la disyunción **p∨q** será verdadera cuando al menos uno de los dos disyuntos es verdadero (es decir, cuando uno de ellos o ambos lo son) y será falsa únicamente cuando ambos disyuntos son falsos.

Esto se puede expresar mediante una tabla semejante a la expuesta para el conjuntor:

p	q	**p ∨ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	**F**	**F**

Tabla 3. Tabla de valores de verdad de la disyunción

Observemos que, en el lenguaje natural, en realidad, la partícula "o" se utiliza en dos sentidos diferentes:

- algunas veces se trata de una "disyunción exclusiva" como, por ejemplo, cuando decimos: "*San Lorenzo gana o empata el partido*", donde se interpreta que no pueden ser ambas verdaderas a la vez.
- otras veces se trata de una "disyunción inclusiva" como, por ejemplo, cuando decimos: "*El próximo semestre voy a estudiar inglés o francés*", en cuyo caso no se excluye la posibilidad de que ambas componentes sean verdaderas, para que la proposición original lo sea.

Para nosotros, el símbolo ∨ tendrá este último sentido, es decir, representará una disyunción inclusiva.

En función de todo lo expresado anteriormente, podemos pensar, por ejemplo, en las cuestiones siguientes:

¿Cómo podríamos representar, utilizando símbolos del lenguaje de la lógica, la siguiente proposición?

Carlos es inteligente pero no es estudioso.

La idea básica consiste en identificar primero las proposiciones más simples que la componen (es decir, aquellas que no contienen ningún "nexo"), representarlas con letras enunciativas y luego ligarlas usando los *juntores* que representan los nexos entre ellas.

En nuestro caso si usamos las letras enunciativas p y q:

p: *Carlos es inteligente.*

q: *Carlos es estudioso.*

la proposición inicial puede representarse o "formalizarse" como:

$$\mathbf{p \wedge \neg q}$$

¿Qué valor de verdad tomará la expresión $p \wedge \neg q$ en el caso de que tanto p como q representen proposiciones verdaderas?

Observando la tabla correspondiente a la negación (Tabla 1), vemos que, en el caso de que q sea V, $\neg q$ será F. Luego, nos queda una conjunción entre una expresión (p) que es V, y una expresión ($\neg$ q) que es falsa. Observando la tabla correspondiente a la conjunción (Tabla 2), vemos que en caso de que uno de los dos componentes de la conjunción sea F, la conjunción es F.

¿Cómo podríamos analizar el valor de verdad que toma una expresión como $p \wedge \neg q$ para cada posible combinación de valores de verdad (o estado) de sus componentes?

En este caso, podríamos recurrir a una tabla de verdad:

p	q	$\neg$ q	**p $\wedge$ $\neg$ q**
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Una tabla de verdad, es una tabla que muestra el valor de verdad de una proposición compuesta, para casa combinación de verdad que se puede establecer. El formato más popular de tablas de verdad lo introdujo Ludwing Wittenstein en su Tractatus lógico-philosophicus, publicado en 1921.

Observemos que:

- en las primeras columnas de la tabla siempre se colocan las letras enunciativas que componen la expresión que queremos analizar,
- en la última se coloca la expresión completa a analizar,
- si es necesario, debemos considerar columnas intermedias (como en este caso una columna especial para analizar el valor de ¬q, que es necesario conocer para poder determinar luego el valor de p $\wedge$ ¬ q),
- la tercera fila de la tabla, por ejemplo, nos informa que cuando p es F y q es V, la expresión p $\wedge$ ¬ q es F.

Expresiones como p, ¬ q, p $\vee$ q, p $\wedge$ ¬q no son en sí mismas proposiciones. Son expresiones del lenguaje de la lógica que representan proposiciones, lo que se denomina usualmente "fórmulas lógicas". Más adelante, definiremos con mayor precisión lo que constituye (y lo que no) una fórmula lógica.

Actividad Nro. 1

La resolución de las siguientes actividades servirá para afianzar las nociones construidas hasta el momento y comenzar a plantearnos nuevas cuestiones que darán lugar a nuevas nociones teóricas.

1) Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es una proposición:

a) 1 + 8 = 10
b) La suma de dos enteros es un entero
c) Río Cuarto está en la provincia de Neuquén
d) Los extraterrestres no existen
e) Sumar dos números naturales.

f) $x^2 + 4 = 5$
g) Existe algún número real x que verifica la ecuación:
$x^4 + x^2 + 7 = 0$

2) Supongamos que p, q y r representan las siguientes proposiciones:

p: 2 es par; q: 3 es primo; r: 5 es par

Traduce al lenguaje natural las siguientes expresiones:

a) $q \wedge \neg p$ b) $\neg p \vee q$ c) $\neg p \wedge \neg q$ d) $\neg(r \vee p)$ e) $\neg(q \wedge \neg r)$

3) Si representamos con p: 4 es múltiplo de 2, q: 6 es divisible por 3 y r: 5 es divisible por 2. Representa en forma simbólica los enunciados dados a continuación:

a) 4 es múltiplo de 2 o 6 es divisible por 3
b) 6 es divisible por 3 y 5 no es divisible por 2
c) No es cierto que, 6 es divisible por 3 y 5 es divisible por 2
d) No es verdad que, 5 no es divisible por 2 y 4 es múltiplo de 2

4) Representa en forma simbólica las siguientes proposiciones:

a) El cielo está parcialmente nublado y la temperatura es de 18ºC.
b) El presidente o el vicepresidente darán un discurso.
c) El avión despegará aunque se desate la tormenta.
d) El número 4 es mayor que 0 pero el -4 no lo es.
e) No es cierto que Juan y Daniela sean novios.
f) No es verdad que, el triángulo ABC sea rectángulo o isósceles.

5) Suponiendo que p es verdadera, q es falsa y r es falsa, determina el valor de verdad de las siguientes expresiones:

a) $(p \vee q) \wedge r$ b) $(p \wedge \neg q) \vee r$ c) $\neg (r \wedge p) \vee q$

6) i) Confecciona las tablas de verdad de las siguientes fórmulas:

a) $p \wedge \neg p$ b) $\neg p \vee \neg q$ c) $\neg (p \wedge q)$ d) $(p \wedge \neg q) \vee r$ e) $\neg r \vee (q \vee r)$

ii) ¿Qué puede observar de particular en la tabla correspondiente a la fórmula de a)? ¿y en la de e)?

¿Puede establecer alguna relación entre las fórmulas de los incisos b) y c) a partir de la observación de sus tablas?

7) Sin usar la tabla de verdad contestar:

a) ¿Qué valores de verdad deberían tomar las letras enunciativas p, q y r, para que la fórmula: $r \wedge \neg (p \vee q)$ resulte verdadera?

b) ¿En qué casos la expresión $p \vee (\neg q \wedge r)$ resultará falsa?

Hasta el momento este nuevo lenguaje de la lógica cuenta con los siguientes símbolos:

p, q , r, … (letras enunciativas), que representan **proposiciones**.

$\neg$ (negador), que representa la partícula "**no**", "no es cierto que", "no es verdad que".

$\wedge$ (conjuntor), que representa las partículas "**y**", "pero", "aunque".

$\vee$ (disyuntor), que representa la partícula "**o**".

Sin embargo, estos símbolos no son suficientes para representar un gran número de proposiciones, como por ejemplo, la siguiente:

Si un número es múltiplo de 4 entonces es par.

Muchas propiedades matemáticas vienen expresadas mediante proposiciones de este tipo. Por esto es que vamos a incluir, a continuación, otros dos nuevos juntores: el **condicional** ($\rightarrow$) y el **bicondicional** ($\leftrightarrow$) y comentaremos algunas particularidades de los mismos.

2.3. Implicador o Condicional

El símbolo → recibe el nombre de **implicador** o **condicional** y puede ser considerado como una formalización de la partícula del lenguaje ordinario: **"si … entonces…"**.

La unión de dos expresiones, como por ejemplo, dos letras enunciativas "p", "q" mediante el implicador, es la **implicación** entre ellas: "**p → q**" que se lee: "si p entonces q" o también "p implica q".

Usualmente, la expresión que precede a la implicación se denomina **antecedente**, y la que le sucede, **consecuente**.

p → q

↙ ↘

antecedente consecuente

Ahora bien, ¿cuál es el significado del implicador?

Analicemos la siguiente proposición:

***Si** llueve **entonces** uso mi paraguas.*

¿Cuándo será falsa esta proposición? Consideramos que sólo dirá una falsedad en el caso de que efectivamente *esté lloviendo* y, sin embargo, *yo no use mi paraguas*. Es decir, será falsa en el caso de que el

antecedente sea V y el consecuente sea F. En las demás situaciones, se considera verdadera.

Esto se puede describir mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	p → q
V	V	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	F	V

Tabla 4. Tabla de valores de verdad del condicional

Un condicional sólo es falso si tiene antecedente verdadero y consecuente falso. En los demás casos, resulta verdadero.

Debemos aclarar que no solamente las partículas del lenguaje natural del tipo "Si… entonces…" pueden ser representadas por un condicional. Hay otras expresiones del lenguaje natural que también corresponden a proposiciones condicionales, y en las que no necesariamente el antecedente debe aparecer en primer lugar, sino que lo reconocemos por la estructura general de la proposición y los nexos que intervienen.

Veamos algunos casos:

a) *Cecilia será una buena alumna si estudia mucho.*

(o, **si** Cecilia estudia mucho**,** será una buena alumna.)

La partícula **si** indica que la proposición que le sigue es el antecedente. Es decir, que cualesquiera de las dos proposiciones anteriores se pueden reescribir así:

Si Cecilia estudia mucho, **entonces** será una buena alumna.

b) Gastón puede cursar cálculo **sólo si** ha aprobado el tercer ciclo de la EGB

(o **Sólo si** ha aprobado el tercer ciclo de la EGB, Gastón puede cursar cálculo).

La proposición que sigue a **sólo si** es el consecuente, con lo cual cualquiera de las dos proposiciones anteriores puede escribirse como:

Si Gastón cursa Cálculo, **entonces** ha aprobado el tercer ciclo de la EGB.

c) **Cuando** tú lees, Juan trabaja en la computadora.

(o, Juan trabaja en la computadora **cuando** tú lees.)

La palabra **cuando** en estas proposiciones juega el mismo papel que el **si**, es decir, indica que lo que sigue es el antecedente. Por ende, las proposiciones anteriores pueden escribirse del siguiente modo:

Si tú lees **entonces** Juan trabaja en la computadora.

d) Una **condición necesaria** para que f sea una función biyectiva es que f sea inyectiva.

(o, que f sea una función inyectiva es **condición necesaria** para que f sea biyectiva)

A veces se hace referencia al consecuente como la "condición necesaria" para otra proposición; por lo que una formulación equivalente es:

Si f es una función biyectiva, **entonces** f es inyectiva.

e) Una **condición suficiente** para que dos triángulos sean semejantes es que tengan dos ángulos iguales.

(o, Que dos triángulos tengan dos ángulos iguales es **condición suficiente** para que sean semejantes)

A veces se hace referencia al antecedente como la "condición suficiente" para otra proposición; por lo que una formulación equivalente es:

Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, **entonces** son semejantes.

2.4 Coimplicador o bicondicional

El símbolo ↔ recibe el nombre de **coimplicador** o **bicondicional** y puede ser considerado como una formalización de la partícula del lenguaje ordinario: "**si y sólo si…**".

La unión de dos expresiones, como por ejemplo, dos letras enunciativas "p", "q" mediante el coimplicador, es la **coimplicación** o **bicondicional** entre ellas: **"p↔ q"** que se lee: " p si y sólo si q" .

Ahora bien, ¿cuándo un bicondicional se considera verdadero?

Un **bicondicional es verdadero** cuando sus dos componentes tienen el mismo valor de verdad, es decir cuando ambos son verdaderos o ambos son falsos.

En caso contrario, es falso.

Esto se puede describir mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	**p ↔ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 5. Tabla de valores de verdad del bicondicional

Debemos aclarar que expresiones del lenguaje natural tales como "...siempre y cuando...", o "...es condición suficiente y necesaria para..." también se representan mediante un bicondicional.

Con todo lo expresado anteriormente, podemos plantearnos cuestiones como las siguientes.

¿Cómo representaríamos la proposición: "*Si el gobernador viaja a Buenos Aires o a Santa Fé entonces se reunirá con el presidente*"?

Si tomamos:

p: el gobernador viaja a Bs. As.

q: el gobernador viaja a Santa Fé.

r: el gobernador se reunirá con el presidente.

La proposición se formalizará así: $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}$

Supongamos que p fuese verdadera, q fuese falso y r fuese falso

¿Qué valor de verdad tomaría la fórmula $(p \vee q) \rightarrow r$?

Como p es V y q es F, la disyunción $p \vee q$ resulta V. Como el antecedente de la implicación $(p \vee q)$ es V y su consecuente r es F, la implicación $(p \vee q) \rightarrow r$ resulta F.

¿Y si queremos saber qué valores de verdad tendrá la fórmula $(p \vee q) \rightarrow r$ para cada posible combinación de valores de verdad de sus letras enunciativas?

Una manera sería realizar la tabla de verdad:

p	**q**	**r**	**$p \vee q$**	**$(p \vee q) \rightarrow r$**
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Esta tabla nos muestra las ocho posibles combinaciones de valores de verdad que pueden tomar las letras **p**, **q** y **r** y el correspondiente valor de $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}$ en cada uno de estos casos.

Actividad Nro 2

1) Si p: Hoy llueve, q: voy al cine y r: voy al teatro., formular verbalmente las expresiones simbólicas que se dan a continuación:

a) $p \rightarrow q$ b) $\neg p \rightarrow (\neg r \wedge \neg q)$ c) $q \vee r \leftrightarrow r$

2) Suponiendo que a, b, y c son números reales fijos y que p: $a < b$, q: $b < c$ y r: $a < c$, representar en forma simbólica los siguientes enunciados:

Si $a<b$ entonces $b \geq c$.

Si $a \geq b$ y $b < c$, entonces $a \geq c$.

Si no es verdad que ($a < b$ y $b < c$), entonces $a \geq c$.

3) Escribir cada una de las siguientes proposiciones en la forma "si ... entonces..." de una proposición condicional y representarlas simbólicamente.

a) El certificado tiene validez si está firmado por el director.

b) El programa es legible solo si está bien estructurado.

c) Cuando estudies tendrás oportunidad de actualizar tus conocimientos y de aprender otros nuevos.

d) Especificar las condiciones iniciales es una condición necesaria para que el programa no falle.

e) Para que un número sea múltiplo de 4 es condición suficiente que sea múltiplo de 2.

4) Formalizar las siguientes proposiciones:

a) Ser mayor de 16 años no es condición suficiente para obtener el carnet de conductor.

b) Una condición necesaria y suficiente para que una función f posea función inversa es que f sea biyectiva.

c) Que este número sea múltiplo de seis es condición suficiente, pero no necesaria, para que sea múltiplo de tres.

d) Que este número sea múltiplo de cinco no es condición necesaria ni suficiente para que sea múltiplo de dos.

5) Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas, suponiendo que p y r son falsas y que q y s son verdaderas.

a) $\neg p \rightarrow r$ b) $\neg (p \rightarrow q)$ c) $(p \rightarrow \neg s) \wedge (q \leftrightarrow s)$

d) $q \rightarrow p \wedge \neg r$

6) Elaborar las tablas de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

a) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ b) $p \vee q \leftrightarrow p \wedge q$ c) $q \rightarrow p \wedge \neg r$

7) i) Formaliza las siguientes proposiciones:

a) Si 6 es divisible por 4 entonces 6 es par.

b) Si 6 es par, entonces 6 es divisible por 4.

c) Si 6 no es par, entonces 6 no es divisible por 4.

ii) ¿Qué relaciones puedes establecer entre la "forma" de la proposición dada en a) y la "forma" de la proposición dada en b)?

¿Y entre la forma de la proposición dada en a) y la proposición dada en c)?

iii) ¿Son verdaderas o falsas las tres proposiciones dadas?

Volver

3. Tautologías. Contradicciones

3.1. Tautologías

En los trabajos prácticos anteriores, hemos visto que hay fórmulas que tienen características especiales. Por ejemplo, vimos que hay fórmulas que son siempre verdaderas, para cualquier combinación de valores de verdad que tomen las letras enunciativas que la componen.

Un ejemplo de este tipo de fórmulas es: $\mathbf{p \vee \neg p}$.

Sabemos que hay sólo dos opciones para p: es V o es F.

Si p es V, la fórmula $p \vee \neg p$ también lo será (ya que uno de sus disyuntos es V)

Si p es F, $\neg p$ resultará V, y por lo tanto $p \vee \neg p$ también resultará V (ya que uno de sus disyuntos, en este caso $\neg p$, es V)

Por lo tanto, $p \vee \neg p$ es V siempre, es decir, para cualquier valor de verdad que tome la letra enunciativa p.

A este tipo de fórmulas se las denomina **tautologías.**

En general, entonces:

Una fórmula es una **tautología** si resulta verdadera para cualquier combinación de valores de verdad de las letras enunciativas que la componen.

En la tabla de verdad, podemos reconocer a una tautología por el hecho que en su última columna todos los valores de verdad son V.

Por ejemplo, si construimos la tabla de verdad de $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$:

p	¬ **p**	p∨¬ **p**
V	F	V
F	V	V

Vemos que su columna final arroja todos V.

3.2. Contradicciones

Del mismo modo en que hay fórmulas que son siempre verdaderas, hay otras fórmulas que resultan siempre falsas para cualquier combinación de valores de verdad que tomen las letras enunciativas que las componen.

Analicemos, por ejemplo, la siguiente fórmula: $\neg\, \mathbf{(p \rightarrow q) \wedge q}$

Para que sea V, $\neg\,(p \rightarrow q)$ debería ser V y q también debería ser V (ya que este es el único caso donde el conjunción es V).

Pero para que $\neg\,(p \rightarrow q)$ sea V, $p \rightarrow q$ debería ser F, y la única forma de que esto ocurra es que p sea V y q sea F.

Pero, entonces, estaríamos diciendo, por un lado, que q debe ser V, y por el otro, que q debe ser F, y esto ¡no puede ser!

Esto nos dice que la fórmula **Nunca** será verdadera. O lo que es lo mismo, que siempre será falsa, independientemente de los valores de verdad que tomen p y q.

Esto se puede constatar en una tabla de verdad:

p	q	$p \to q$	$\neg (p \to q)$	$\neg (p \to q) \wedge q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

A este tipo de fórmulas se las denomina **contradicciones**. Se las puede reconocer porque en su tabla de verdad la última columna arroja todos valores F.

En general:

Una fórmula es una **contradicción** si resulta falsa para cualquier combinación de valores de verdad de las letras enunciativas que la componen.

Una cuestión para analizar:

Si una fórmula A es una tautología, ¿qué podemos decir de la fórmula $\neg A$?

Si una fórmula A es una contradicción, ¿qué podemos decir de la fórmula $\neg A$?

Volver

4. Recíproca y contrarreciproco de una proposición condicional

En el último ejercicio de la Actividad Nº 2, analizamos tres proposiciones (condicionales) muy particulares:

a) *Si 6 es divisible por 4 entonces 6 es par*.

b) *Si 6 es par, entonces 6 es divisible por 4*.

c) *Si 6 no es par entonces 6 no es divisible por 4.*

y observamos ciertas relaciones entre la "forma" de las mismas.

Esto nos lleva a darles un nombre particular a estas proposiciones:

Si tenemos una **proposición** de la forma **p** $\rightarrow$ **q**, llamaremos **recíproca** de esta proposición a la proposición de la forma **q** $\rightarrow$ **p** y contrarreciproco la proposición de la forma $\neg$**q** $\rightarrow\neg$**p**

De acuerdo con esta definición, la proposición b) es la recíproca de la proposición a) y la proposición c) es la contrarreciproco de la proposición a).

También observamos que las proposiciones a) y b) no tienen el mismo valor de verdad, lo cual nos asegura que, una proposición y su recíproca no necesariamente tienen el mismo valor de verdad.

Sin embargo, las proposiciones a) y c) sí tienen el mismo valor de verdad.

Esto, ¿ocurrirá siempre? Es decir, una proposición y su contrarreciproco, ¿tendrán siempre el mismo valor de verdad?

Consideremos la proposición: *Si 1 < 2, entonces 3 > 4.*

Sean p: *1 < 2* y q: *3 > 4*

Su formalización sería: $p \rightarrow q$

La recíproca se expresa, en símbolos: $q \rightarrow p$

En palabras: *Si 3 > 4 entonces 1 < 2* la contrarreciproco se expresa, en símbolos: $\neg q \rightarrow \neg p$

En palabras: *Si 3 ≤ 4, entonces 1 ≥2*.

Como p es V y q es F, la proposición $p \rightarrow q$ resulta F.

Su recíproca $q \rightarrow p$ resulta V.

Su contrarreciproco: $\neg q \rightarrow \neg p$ resulta F.

En este ejemplo, se repite el hecho de que una proposición y su contrarreciproco tienen el mismo valor de verdad.

Para probar que esto ocurre siempre, deberíamos verificar que las fórmulas **p** $\rightarrow$ **q** y $\neg$**q** $\rightarrow\neg$**p** toman siempre los mismos valores de verdad para cada posible combinación posible de valores de verdad de p y q. Esto puede realizarse construyendo las tablas de verdad de ambas fórmulas y corroborando que, en todas las filas, los valores de **$p \to q$** y **$\neg q \to \neg p$** coinciden.

p	**q**	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**V**	**V**
F	F	**V**	**V**

(Hemos omitido las columnas intermedias que quedan a cargo del lector)

← Volver

5. Equivalencia Lógica

En el apartado anterior hemos vislumbrado que es posible establecer algunas relaciones entre ciertas fórmulas.

En particular, vimos que las fórmulas **$p \to q$** y **$\neg q \to \neg p$** toman los mismos valores de verdad para cada posible combinación posible de valores de verdad de p y q.

En este caso, decimos que las formulas **$p \to q$** y **$\neg q \to \neg p$** son "lógicamente equivalentes"

En general:

Las fórmulas A y B son *lógicamente equivalentes* si A y B tienen ambas el mismo valor de verdad, para cualquier combinación de valores de verdad de sus letras enunciativas.

Esto se suele expresar: $A \equiv B$.

Las letras A y B no pertenecen estrictamente al lenguaje de la lógica, sino que las usamos para hablar de dos fórmulas cualesquiera. Del mismo modo, el símbolo $\equiv$ no es un símbolo del lenguaje de la lógica, y simplemente lo utilizamos para expresar (en forma resumida) una relación entre dos fórmulas.

Si una fórmula A es lógicamente equivalente a otra fórmula B

($A \equiv B$) ¿Qué puede decir acerca de la fórmula **$A \leftrightarrow B$?.**

Veamos otros ejemplos de proposiciones lógicamente equivalentes:

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Observemos que estamos diciendo que la negación de una disyunción es lógicamente equivalente a la conjunción de las negaciones de cada disyunto.

Esta equivalencia lógica se conoce con el nombre de **ley de De Morgan.**

Probemos que vale esta equivalencia:

p	q	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Como se ve en la tabla ambas fórmulas tienen los mismos valores de verdad para cada combinación de valores de verdad de sus letras enunciativas, con lo cual **$\neg(p\vee q)$** y **$\neg p\wedge\neg q$** son lógicamente equivalentes.

¿A qué será equivalente la negación de una conjunción?

$\mathbf{p \leftrightarrow q}$ es lógicamente equivalente a $\mathbf{(p \to q) \wedge (q \to p)}$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**F**	V	V	**V**

La tabla de verdad prueba efectivamente que

$\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).}$

(lo cual nos asegura que un bicondicional es la conjunción de un condicional y su recíproca).

Actividad Nro. 3

1) Analiza si alguna de las siguientes fórmulas es una tautología o una contradicción, justificando tu respuesta.

a) $p \wedge \neg p$ b) $q \to (p \to q)$

c) $p \vee q \to p \wedge q$ d) $(p \vee q \to r) \to (\neg r \to \neg p)$

2) Representa simbólicamente cada una de las proposiciones dadas en los incisos siguientes. Escribe su recíproca y su contrarreciproco tanto en símbolos como con palabras. Determina también el valor de verdad para la proposición condicional, para su recíproca y para su contrarreciproco.

a) Si 2 es par entonces $2 \neq 3$.

b) $|1| < 3$ si $-3 < 1 < 3$.

c) $|5| > 3$ si $5 > 3$ ó $5 < -3$

3) i) En cada uno de los siguientes casos determinar si las fórmulas A y B son lógicamente equivalentes.

a) $A: \neg(\neg p)$, $B: p$

b) $A: p \vee q$, $B: q \vee p$

c) $A: \neg(p \to q)$, $B = \neg p \to \neg q$

d) $A: \neg(p \to q)$, $B: p \wedge \neg q$

ii) ¿Podrías decir en palabras lo que expresan estas equivalencias?

Puedes hallar más información sobre lo que hemos trabajado en el libro "Lógica Simbólica" cuyo autor es Manuel Garrido, y que se encuentra en Biblioteca de la U.N.R.C.

Volver