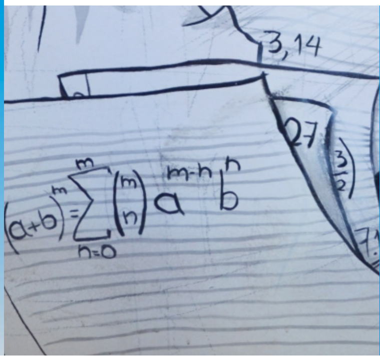
Integración a la Cultura Académica (ICA)
QUÍMICA
Módulo de Matemática

Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

www.exa.unrc.edu.ar



Integración a la Cultura Académica (ICA)
Módulo de Matemática

Gabriela Palacio

Carmina Alturria Lanzardo

Leopoldo Buri

Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

www.exa.unrc.edu.ar

¿Cómo leer este material?

A lo largo del material encontrarán los siguientes iconos:

Actividad
Tareas, consignas, situaciones problemáticas.

Importante
Tener en cuenta, destacar, recordatorio, atención.

Observación
Datos que explican o aclaran un tema.

Ejemplo
Ejercicios de muestra.

Reflexión
Interrogantes, planteos.

Bibliografía
Lecturas, material bibliográfico.

Desde el índice podrán acceder a través de los enlaces a cada uno de los temas que se detallan en el mismo.

Volver
Volver
Permite retornar al índice.

Este material ha sido elaborado en el marco del Programa de Ingreso, Continuidad y Egreso de Estudiantes en las carreras de pregrado y grado de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Res. Rec 380/15) y el proyecto Mediación de Materiales de Ingreso para las Carreras de la UNRC 2017-2019 "La Valoración Continua para Fortalecer los Procesos Educativos". (Res. Rec 785/17). UNRC- Secretaría Académica.

Índice

A los estudiantes

Los conceptos que aquí se introducen, en su gran mayoría, ya los has estudiado en la escuela de nivel Medio, son herramientas que deben ser manejadas con soltura por todas aquellas personas que se acerquen a estudiar alguna de las carreras de esta Facultad.

En las actividades de ingreso se abordarán situaciones problemáticas relacionadas con contenidos desarrollados en este material.

Se buscará que la clase de Matemática sea un espacio en el cual puedas desplegar tareas que forman parte de la actividad matemática: formular conjeturas, ensayar formas de validarlas, producir argumentos, arriesgar respuestas para las cuestiones que se planteen, producir formas de representación que contribuyan a arribar a las resoluciones que se buscan, reformular y reorganizar los viejos conocimientos a la luz de los nuevos que se produzcan.

Les deseamos el mayor de los éxitos en la carrera que están iniciando.

Volver

Parte I: Lenguajes matemáticos - conjuntos numéricos

En este módulo recordamos distintos lenguajes que se utilizan en diferentes situaciones matemáticas. Luego te encontrarás con los ya conocidos conjuntos numéricos y sus propiedades. También repasamos algunos sistemas de medición, sus relaciones y la notación científica con la que seguramente has trabajado en asignaturas como Física, Química y Biología.

1. Lenguajes matemáticos

En Matemática se emplean distintos lenguajes tales como:

Coloquial, es el que se utiliza para expresar una idea en forma oral o escrita.

Simbólico, es el que permite expresar con símbolos, en forma precisa las ideas dadas en lenguaje coloquial. Tiene la ventaja de ser sintético y claro para las demostraciones y razonamientos.

Gráfico, es el que ayuda a aclarar e interpretar algunos conceptos y situaciones.

Con el fin de ejemplificar los lenguajes utilizados en Matemática recordemos que, cualquier colección de objetos o individuos se denomina conjunto. Un conjunto está formado por objetos, que se llaman elementos.

En el contexto de la Matemática, el término conjunto no tiene una definición, sino que es un concepto primitivo, se llama así por ser el origen de todos los demás conceptos que se generan a partir de él. En esta parte, nuestro objetivo es estudiar aquellos conjuntos que están relacionados con el campo de la Matemática, en particular los conjuntos numéricos. Algunos conjuntos, dados en lenguaje coloquial son:

El conjunto de los números enteros.

El conjunto de los números naturales mayores que 6 y menores que 10.

El conjunto de los números enteros positivos y múltiplos de 3.

Para simbolizar cuando un objeto es elemento de un conjunto, se escribe

$$a \in A$$

Y se lee

"a pertenece a A" o "a es un elemento de A".

Para simbolizar cuando un objeto no es elemento de un conjunto Se escribe

$$a \notin A$$

Y se lee

"a no pertenece a A"o "a no es un elemento de A".

Cuando usamos el lenguaje simbólico, utilizamos letras mayúsculas para designar los conjuntos y letras minúsculas para designar los elementos.

Los símbolos$\mathbb{N}$, Z, Q, y R servirán para denotar los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$:el conjunto de los números naturales
Z: el conjunto de los números enteros
Q: el conjunto de los números racionales
R: el conjunto de los números reales

Definir un conjunto es describir de manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son sus elementos. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más simple es por extensión o enumeración, es decir, listando todos los elementos del conjunto separándolos por comas y encerrando todo entre llaves. Otra forma de describir un conjunto es por comprensión, es decir enunciando una propiedad que cumplen sólo los elementos que lo forman.

Ejemplo: Definimos los siguientes conjuntos por extensión y por comprensión.

$\mathrm{A} = \{\mathrm{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x/x\ es\ un\ día\ de\ la\ semana}\}$

$\mathrm{B} = \{1,3,5,7,9\}$

$\mathrm{B} = \{\mathrm{x/x} \in \mathbb{N}, \mathrm{x\ es\ impar\ y\ } 1 \leq \mathrm{x} \leq 9\}$

$\mathrm{C} = \{1,2,3,4,5, \dots, n, \dots\}$

$\mathrm{C} = \{\mathrm{x\ /x} \in \mathbb{N}\}$

Un conjunto sin elementos se denomina *conjunto vacío,* se lo denota con el símbolo $\{\}$ o $\emptyset$

Comentarios

El orden en el cual se enumeran los elementos del conjunto es irrelevante, y los elementos que están repetidos se nombran una sola vez.

En algunos casos no se listan todos los elementos, pero se nombran algunos y se usan los puntos suspensivos (…) para sugerir los elementos faltantes. Sin embargo, esta forma de nombrarlos es a veces ambigua, ya que no puede saberse con anticipación los elementos que son omitidos. Por ejemplo, dado el siguiente conjunto

$B = \{3,5,7, ..\}$, B podría ser el conjunto de los números impares, o podría ser el conjunto de los números primos mayores que 2.

Ejemplo: En cada uno de los siguientes incisos se escribe en lenguaje simbólico los conjuntos dados en lenguaje coloquial.

a) El conjunto formado por todos los números naturales impares, mayores o iguales que 3.
En lenguaje simbólico es: $B = \{x/x = 2n + 1 \ \wedge n \in \mathbb{N}\}$
El conjunto B tiene infinitos elementos, entonces no se puede definir por extensión.

b) El conjunto formado por los números naturales, comprendidos entre 2 y 2^6 incluyendo el 2 y 2^6 y que son potencias de 2.

En lenguaje simbólico es:
$C = \{x / x \in \mathbf{N}, \quad x = 2^n, \quad n = 1,2,...,6\}$

El conjunto C es finito, entonces también lo podemos definir por extensión, esto es

$C = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

c) El conjunto formado por los números naturales que sean pares e impares a la vez. Este conjunto no tiene elementos y se simboliza

$A = \{x \in \mathbf{N} / x = 2n \ \text{ y } \ x = 2n+1, n \in \mathbf{N}\} = \{ \ \}$

d) El conjunto de los números reales menores que cero y mayores que cero.
En símbolos: $B = \{x \in \mathbf{R} / x > 0 \ \text{ y } x < 0\} = \{ \ \}$

En los ejemplos dados anteriormente se ha usado el lenguaje coloquial y el lenguaje simbólico. Ahora haremos referencia al uso del lenguaje gráfico de conjuntos. Este lenguaje es de suma importancia en la Matemática ya que la gráfica de una situación ayuda a la comprensión del problema.

Los conjuntos se representan gráficamente usando diagramas de Venn. En este tipo de diagramas un conjunto se representa con una curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. Por ejemplo, al conjunto $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ lo podemos representar con diagramas de Venn así:

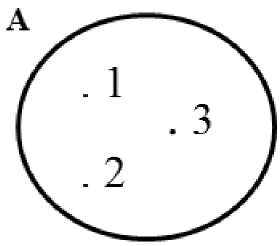


Fig. 1. Conjunto representado como diagrama de Venn.

Cuando trabajamos con conjuntos, es necesario el uso de frases tales como:*"para todo x del conjunto S…"* o bien *"existe un elemento x de S, tal que…"*.

Estas expresiones se pueden escribir en símbolos de la siguiente manera:

$\forall x \in S:$

$\exists\, x \in S:$

Los símbolos $\forall$, $\exists$ se denominan ***cuantificadores***.

Ejemplo:

a) Si decimos

"Todos los números naturales son positivos"

Es claro que hemos enunciado una proposición general y relativa a todos los números naturales. Otra expresión de esta proposición es:

"Cualquier número natural es positivo"

En lenguaje simbólico ambas expresiones coloquiales se expresan:

$\forall\, x \in \mathrm{N}, x$ es positivo

b) Si decimos

"Existe un número entero que es impar"

Este enunciado, también puede expresarse como:

"Hay al menos un número entero que es impar"

Que en símbolos ambas expresiones se simbolizan como:

$\exists x \in \mathrm{Z}, x$ es impar.

Un problema de interés es la negación de los cuantificadores. Por ejemplo, dada la siguiente expresión coloquial:

"Todo número entero es impar"

que en símbolos se escribe $\forall x \in Z, x$ es impar

En lenguaje coloquial su negación se expresa como:

"No todos los números enteros son impares"

También podemos decir:

"Existen enteros que no son impares"

Ambas expresiones se traducen en símbolos así:

$\exists x \in Z, x$ no es impar

Ejemplo: Analicemos los distintos cambios de lenguaje en las siguientes situaciones.

Lenguaje simbólico	Lenguaje coloquial
5 x + 1	*quíntuple de un número más uno*
5(x + 1)	*quíntuple de la suma de un número y uno*
4 (3x+1)	*cuádruple de la suma entre el triple de un número y uno*

Tabla 1.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El cuadrado de la suma entre a y b	$(a + b)^2$
El duplo del cuadrado de un número aumentado en 5.	$2x^2 + 5$
La suma de dos números pares consecutivos	$2n + (2n+2)$

Tabla 2.

¿Cómo se puede decidir si un enunciado matemático es verdadero o falso?
¿Cómo es posible explicar la decisión tomada?

En algunos casos la tarea es sencilla, por ejemplo, dado el enunciado:

6 es un número par

Para decidir cuál es su valor de verdad basta con recordar propiedades de los números naturales pares como:

- Los números naturales pares al dividirlos por 2 dan resto cero.
- Un número natural par es un múltiplo de 2.

Por lo tanto, como al dividir 6 por 2 se obtiene cociente 3 y resto cero y además 6 es múltiplo de 2 ya que 6 = 2.3, es posible concluir que el enunciado es verdadero y las propiedades utilizadas justifican la decisión tomada.

Podemos proceder de manera similar para determinar el valor de verdad de:

3 es un número par

En este caso, como el resto que se obtiene al dividir 3 por 2 es 1, se concluye que el enunciado es **falso**.

Sin embargo, en Matemática se trabaja también con enunciados como:

1) $\exists\ x \in \mathrm{R} : x^2 + 1 = 0$
2) $\exists\ x \in \mathrm{R} : 2x^2 + x = 1$
3) $\forall\ x \in \mathrm{R},\quad x^2 \geq 0$
4) $\forall\ x \in \mathrm{R},\quad x + 2 < 5$

¿Cómo trabajar en estos casos?

1) Para determinar si la proposición es verdadera debemos encontrar algún número real que verifique la igualdad $x^2 + 1 = 0$ o equivalentemente $x^2 = -1$, como no hay

ningún número real que elevado al cuadrado dé por resultado un número negativo no existen valores reales que verifiquen la ecuación dada. Se puede concluir, entonces, que el valor de verdad del enunciado es **falso**.

2) Nuevamente, para determinar el valor de verdad, se debe determinar si existe algún número real que verifique la igualdad $2x^2 + x = 1$ o equivalentemente $2x^2 + x - 1 = 0$. Si se resuelve la ecuación $2x^2 + x - 1 = 0$ se obtienen dos soluciones $x = \frac{1}{2}$ y $x = -1$. ¿Cuál es entonces el valor de verdad del enunciado?

3) Para decidir si la desigualdad $x^2 \geq 0$ se cumple para todo número real, se puede analizar los posibles signos de x en el producto $x.x$; si x es positivo, el producto resultará positivo y si x es negativo, el producto también resultará positivo, además, si $x=0$ resulta también que $x^2 = 0$, luego cualquiera sea x se verifica la desigualdad y por lo tanto el valor de verdad del enunciado es **verdadero.**

4) Para verificar si la desigualdad $x + 2 < 5$ se cumple para todo número real, debemos resolver la inecuación $x + 2 < 5$, despejando resulta $x < 3$. ¿Qué significa este resultado? ¿Cuál es el valor de verdad del enunciado? En este caso es posible determinar el valor de verdad sin necesidad de resolver la inecuación $x + 2 < 5$, notemos que si se reemplaza *x* por 4 la desigualdad no se verifica y por lo tanto el enunciado que estamos analizando resulta falso, el número 4 recibe el nombre de **contraejemplo**, es decir un ejemplo que muestra que el enunciado no es verdadero

La tarea de determinación y justificación del valor de verdad de los enunciados matemáticos es muy importante y requiere tanto de la lectura cuidadosa del enunciado como del manejo de propiedades.

Volver

2. Conjuntos numéricos

Todos sabemos que los Números Naturales (ℕ) adquieren distintos significados en función de los contextos en que son presentados; por ejemplo, se utilizan para contar, cuando contamos los alumnos que hoy asistieron a clase, o para establecer un orden, cuando decimos que Japón es la cuarta potencia mundial. También en el mundo actual están presentes a través de la "tecla" o "botón" cuando se los usa como indicadores de acciones. Como este conjunto está en las acciones cotidianas y además es importante para la labor matemática haremos un repaso de sus propiedades.

Algunas propiedades del conjunto de números **naturales**:

- Tiene primer elemento, el cual es el 1. No tiene último elemento.
- Todo número natural tiene un *suceso*r. Un número natural y su sucesor se llaman *consecutivos*.
- Es un conjunto *infinito*.
- Todo número excepto el primero (uno) tiene *antecesor.*
- Entre dos números naturales consecutivos no hay ningún número natural. A cada conjunto que tiene esta propiedad se lo llama *conjunto discreto*.

Su representación en la recta es

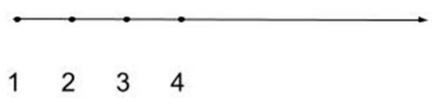


Fig. 2. Representación en la recta del conjunto de números naturales

Los números naturales no alcanzan para resolver todas las situaciones que hacen referencia a cantidades. Así, por ejemplo, si hay que indicar con un número que Aristóteles nació 384 años antes de Cristo, se escribe -384 o si queremos hallar el número que sumado a 6 sea igual a 4, la respuesta es -2. Ambas situaciones dan resultados que no pertenecen al conjunto de los números naturales. Definimos así un nuevo conjunto formado por los números naturales, sus opuestos, y el cero. Este conjunto es el de los Números Enteros (ℤ), y su representación en la recta es:

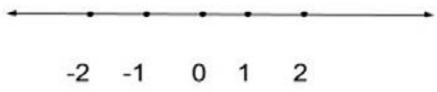


Fig. 3. Representación en la recta del conjunto de números enteros

Detallamos a continuación algunas propiedades del conjunto de los números **enteros**:

- Todos los números enteros tienen un único *antecesor* y un único *sucesor*.
- Es un conjunto infinito que no tiene ni primer ni último elemento.
- Es un conjunto discreto.
- Se puede observar que, si se suman, restan y multiplican dos números enteros se obtiene un número entero, lo cual se expresa diciendo que el conjunto de los números enteros es cerrado para la suma, la resta y el producto. Los números naturales ¿serán cerrados con respecto a estas operaciones?

Dos relaciones importantes en este conjunto son:

- Una relación de ***orden***, que indicaremos con $<$, de la siguiente manera:

  $a < b$ si y solo si $a - b$ es un número negativo
- Una relación de ***divisibilidad*** con la cual construimos un nuevo objeto de estudio matemático denominado: *Teoría de Números Enteros o Aritmética*. Su punto de partida es la siguiente definición:

Si a y b son dos números enteros, diremos que "***a** divide **a b***" si y sólo si existe un número entero c tal que $b = a \cdot c$

En tal caso, utilizaremos la notación $a \mid b$.

A menudo nos referiremos a la situación anterior empleando las expresiones alternativas "a es divisor o factor de b" o "b es un múltiplo de a". Observemos además que en la relación anterior los roles de a y c son idénticos, por lo que también se dice que c es un divisor de b. Por ejemplo, 15 es un divisor de 135 pues $135 = 15 \cdot 9$; por otro lado se puede decir que 135 es un múltiplo de 15 y es un múltiplo de 9.

Usando estos conceptos intenta responder:

a) ¿El producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5?

b) ¿Por qué $44+55+77$ es múltiplo de 11?

c) ¿El resultado de sumar dos múltiplos de 5 es siempre un múltiplo de 10? ¿Qué condiciones deben cumplir dos múltiplos de 5 para que su suma sea múltiplo de 10?

Si bien ampliamos el conjunto original de los números naturales, N, al conjunto de los números enteros, Z, éstos no son suficientes para dar respuesta a situaciones como la siguiente:

Hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2

¿Estás de acuerdo que la respuesta no es un número entero?

Para obtener el resultado debemos hallar un número “n ” tal que $5\,n = 2$, entonces la solución es *n* = 2/5, así el valor de *n* es una fracción la cual *no pertenece* al conjunto de los números enteros (**Z**).

Este tipo de números también aparecen cuando medimos longitudes, capacidades, volúmenes, áreas, tiempos, etc., utilizando una *unidad de medida*. Cuando *medimos* establecemos cuántas veces cabe la unidad en aquello que queremos medir. Pero sea cual fuera esa unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y debemos *fraccionarla*.

Las fracciones se representan como cocientes entre dos números enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0 (para que el cociente este definido).

Las fracciones irreducibles son aquellas cuyos elementos no tienen divisores en común, es decir, el numerador y denominador no son ambos divisibles por un mismo número entero, excepto 1 y −1. Por ejemplo $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{9}$ el numerador no es múltiplo del denominador o viceversa. Las fracciones irreducibles tienen la propiedad que toda fracción equivalente a ella se obtiene multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por un mismo entero no nulo.

Recuerda: todas las fracciones equivalentes representan el mismo número.

Ejemplo: Por ejemplo $\frac{-10}{9}$ es una fracción irreducible y algunas de sus fracciones *equivalentes* son: $\frac{10}{(-9)} = \frac{(-20)}{18} = -\frac{30}{27}$

Resumiendo: el conjunto de los ***Números Racionales*** **(Q)** está formado por expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in Z, b \neq 0$. Además, observa que todo número entero es un número racional, o sea si m $\in$***Z*** *entonces* $m = \frac{m}{1}$ y $\frac{m}{1} \in Q$.

La representación de estos números en la recta real es:

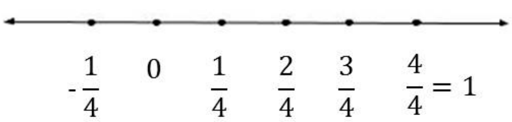


Fig. 4. Representación en la recta del conjunto de números racionales

Repasemos ahora algunas características del conjunto de los números **racionales**:

- No tiene ni primer ni último elemento.
- El conjunto de los racionales es infinito.
- No se puede hablar del sucesor de un número racional porque entre dos números racionales siempre hay otro número racional. De esta propiedad se deduce que: "Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales".
- El conjunto de los números racionales conserva la propiedad de ser cerrado para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La única operación no permitida es la división por cero.

Relación entre expresiones fraccionarias y decimales

Recordemos ahora la relación que existe entre las expresiones fraccionarias y las expresiones decimales. Sabemos que siempre es posible expresar a los números racionales en notación *decimal;* distinguimos dos casos:

- *Las fracciones equivalentes* a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales o números decimales exactos*.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28$$

- *Las fracciones que no son equivalentes* a una expresión cuyo denominador es potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina período. Estos números se llaman *números decimales periódicos*.

Por ejemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}33333\cdots = 0{,}\widehat{3}$ y su período es 3.

Otros ejemplos:

$\frac{13}{99} = 0{,}1313\cdots = 0{,}\widehat{13}$; $\frac{3549}{990} = 3{,}58484\cdots = 3{,}5\widehat{84}$.

Esto nos lleva a la siguiente conclusión:

Todo número racional se puede expresar como un número decimal exacto o como un número decimal periódico.

Además, sabemos que dada una fracción $\frac{a}{b}$, *si* realizamos la división de *a* por *b* obtenemos la expresión decimal de dicho número racional.

Ahora bien, dada la expresión decimal,
¿Podremos encontrar siempre una fracción que la represente?

En estas circunstancias debemos analizar dos casos.

- Si el *número es decimal exacto* es fácil encontrar su expresión fraccionaria equivalente.

  Ejemplos: $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

  $1{,}54 = \frac{154}{100} = \frac{77}{50}$

  $1{,}3 = \frac{13}{10}$

- Si el *número es decimal periódico* procedemos de la siguiente manera:

  Sea el número *x* = 0,315315315...para encontrar su expresión fraccionaria multiplicamos a *x* por una potencia de 10 de manera que un período sea entero, es decir, quede delante de la coma. Para el ejemplo dado 1000 **.** x = 315,315315315**…**

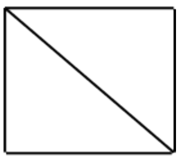
Restando miembro a miembro las siguientes igualdades:

$$
\begin{array}{rcl}
1000 \cdot x & = & 315{,}315315315\ldots \\
- \quad x & = & 0{,}315315315\ldots \\
\hline
999 \cdot x & = & 315
\end{array}
$$

Despejando el valor de x resulta $x = \dfrac{315}{999}$. Esta es la fracción que representa la expresión decimal dada. Notar que cuando tenemos la expresión decimal $x = 0{,}3333\cdots = 0{,}\widehat{3}$, la podemos transformar en $x = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, ambas expresiones representan al mismo valor. Para hacer cálculos con expresiones periódicas se utiliza una aproximación, es decir se consideran sólo algunos decimales del valor exacto, por ejemplo $x = 0{,}3333\cdots \cong 0{,}3$.

¿Qué relación observas entre $0,\widehat{9}$ y 1?

Analicemos ahora la siguiente situación, se desea determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno



1

Aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1es un número **X** tal que

$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de donde $x = \pm\sqrt{2}$

Como buscamos una longitud nos quedamos con $x = +\sqrt{2}$.

Por otro lado, sabemos qué $\sqrt{2} = 1{,}41421356237310\ldots$ No es difícil probar que este número no puede ser representado como el cociente de dos números enteros, por lo tanto, no es un número racional.

Podemos así construir un nuevo conjunto numérico a partir de expresiones decimales infinitos no periódicas, llamado ***Números***

Irracionales (**I**). Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$, el número neperiano $e = 2{,}718281828459\ldots$ y el número pi $\pi = 3{,}141592653589\ldots$.

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales es el conjunto de los *Números Reales* (**R**).

En el siguiente Diagrama de Venn se muestran las relaciones entre los distintos conjuntos de números.

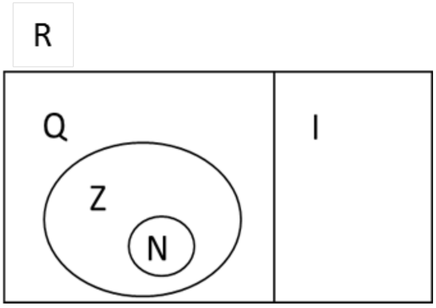


Fig. 5. Relación entre los conjuntos numéricos

A partir de este esquema podemos introducir algunos conceptos tales como:

El conjunto que contiene todos aquellos elementos posibles dentro de la temática que se está tratando se llama *Conjunto Universal.* En general es denotado por U . En los conjuntos de números considerados, el conjunto universal es el conjunto de los números reales, o sea $U = $ **R**.

Dados A y B dos conjuntos de **U**, se dice que el conjunto A es un subconjunto B si y sólo sí todo elemento de A es también elemento de B, esta relación se denomina *Inclusión.* Lo denotamos con $A \subseteq B$.Expresado en símbolos resulta:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$$

El símbolo $\Leftrightarrow$ significa “si y sólo si”
El símbolo $\Rightarrow$ se lee como “entonces” o “implica que”.

En el esquema anterior podemos establecer las siguientes relaciones entre conjuntos, $N \subseteq Z$, $Z \subseteq \mathrm{Q}$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R}$ y $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$.

El símbolo $\wedge$ significa "y" (conjunción).
El símbolo $\vee$ significa "o" (disyunción).

Dados A y B dos conjuntos de **U**, *la unión* de A con B, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B, y la denotamos como $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, en símbolos escribimos:

$$A \cup B = \{x \in \mathbf{U} / x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Con esta operación entre conjuntos podemos definir a los números reales como $R = \mathrm{Q} \cup I$.

Dados A un conjunto de **U**, el *complemento del conjunto* A , es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a $\mathbf{U}$ y que no pertenecen a A . Lo denotamos por A^{C}. La definición en símbolos es:

$$A^{C} = \{x \in \mathbf{U} / \ x \notin A\}$$

En el caso de los conjuntos numéricos, hemos considerado $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}$, luego se verifica que **$\mathbf{I}^{\mathbf{C}}$= Q** y **$\mathbf{Q}^{\mathbf{C}}$ = I**.

Dados A y B dos conjuntos de **U,** *la intersección* de A y B, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B simultáneamente. A esta operación la denotamos como $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. En símbolos resulta:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \in \mathbf{U} / x \in \mathrm{A} \ \wedge \ x \in \mathrm{B}\}$$

Observamos que Z $\cup$ N = Z , Z $\cap$ N = N y Q $\cap$ I = $\varnothing$.

Propiedades de las Operaciones entre los números reales

A continuación, recordemos algunas propiedades de las operaciones entre números reales (suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación).

- Propiedad Conmutativa
  De la suma: $a+b=b+a, \ \forall \ a,b \in R$.
  Del producto: $a.b=b.a, \ \forall \ a,b \in R$.

- Propiedad Asociativa
  De la suma: $(a+b)+c=a+(b+c), \ \forall \ a,b,c \in R$.
  Del producto: $(a.b).c=a.(b.c), \ \forall \ a,b,c \in R$.

- Existencia de Inverso
  De la suma: $\forall \ x \in R, \ \exists (-x) \in R / \ x+(-x)=0$ inverso aditivo, al número cero se lo llama elemento neutro de la suma.
  Del producto: $\forall \ x \in R \ , \ x \neq 0 \ \exists \ \frac{1}{x} \in R \ / \ x.\frac{1}{x}=1$ inverso multiplicativo, al número uno se lo llama elemento neutro del producto.

- Propiedad Distributiva
  Del producto con respecto a la suma:
  $$a.(b+c)=a.b+a.c, \ \forall \ a,b, \ c \in R.$$
  Del producto con respecto a la resta:
  $$a.(b-c)=a.b-a.c, \ \forall \ a,b, \ c \in R.$$
  De la potencia con respecto al producto:
  $$(a.b)^n=a^n.b^n, \ \forall \ a,b \in R, \ \forall \ n \in N.$$
  De la potencia con respecto a la división:
  $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}, \ \forall \ a,b \in R, \text{con } b \neq 0, \ \forall \ n \in N.$$
  De la radicación con respecto al producto:
  Si $n \in N$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \ \forall \ a,b \in R$.
  Si $n \in N$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \ \forall \ a,b \in R \geq 0$

  De la radicación con respecto a la división:
  Si $n \in N$ y n *es* impar, entonces

Recordemos que $\forall a$, puede leerse "para cualquier **a**"o "para todo **a**".

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ \forall a,b\in \mathrm{R}\wedge b\neq 0.$$

Si $n\in \mathrm{N}$ y n es par, entonces

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ \forall a,b\in \mathrm{R}\wedge\ a\geq 0,\ b>0.$$

- Propiedad del producto y cociente de potencias de igual base:

  $a^n.a^m=a^{n+m}\ \forall\ a\ \in R$ y $\forall\ m,n\in N$.

  $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\ \forall\ a\ \in R$, con $a\neq 0$ y $\forall\ m,n\in N$.

  Te sugerimos que pruebes esta última propiedad, recordando para ello que $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ \forall\ a\in R$ con $a\neq 0$ y $\forall\ n\in N$.

- Propiedad de potencia de potencia:

  $(a^m)^n=a^{m.n}\ \forall\ a\ \in R$ y $\forall\ m,n\in N$.

- Potencia con exponente fraccionario:

  $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\forall a\in R\geq 0,\forall m,n\in N.$$

  Pero… ¿qué sucede con el 0 y con el 1 en la suma, el producto y la potencia respectivamente?

  - $a+0=0+a=a,\ \forall\ a\in \mathrm{R}$.
  - $a.1=1.a=a\ ,\forall\ a\ \in \mathrm{R}$.
  - $a^1=a,\ \forall\ a\ \in \mathrm{R}$.
  - $a^0=1,\ \forall\ a\ \in \mathrm{R}\ ,\ a\neq 0$.
  - $1^a=1,\ \forall\ a\ \in \mathrm{R}$.
  - $0^a=0,\forall\ a>0,\ a\ \in \mathrm{R}$. ¿Por qué *a* debe ser positivo?
  - $\forall$ *a, b* $\in \mathrm{R}$, *se verifica: ab* $=0$ si y sólo si *a* $=0$ ó *b* $=0$

Además, recordemos algunas propiedades donde los números 0 y 1 juegan un rol importante ya sea por ser el resultado de cierta operación o por la atención que hay que poner cuando se opera con ellos.

- Todo número real multiplicado por 0 (cero) da como resultado 0.
- Todo número real dividido por la unidad (1) da por resultado el mismo número.
- La raíz de cualquier índice del número 0 es cero.
- La raíz de cualquier índice del número 1 es uno.

Te proponemos que antes de seguir avanzando escribas las cuatro últimas propiedades en lenguaje simbólico o matemático.

____

____

____

____

____

Otras propiedades

Es importante notar que la potenciación y la radicación **no** son distributivas con respecto a la suma y la resta.

Por ejemplo:

$(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2$ ya que

$(3+5)^2 = 8^2 = 64 \neq 34 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25$.

$(3-5)^3 \neq 3^3 - 5^3$. Verifícalo.

Repasemos las siguientes identidades.

Recordemos que

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$
$$\forall a, b \in R \, y \, \forall n \in Z$$

- **Diferencia de cuadrados:** La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos números.

  Así, por ejemplo:

  $$3^2 - 5^2 = (3-5)(3+5);$$

  $$821^2 - 820^2 = (821-820)(821+820)$$

  En general $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\ \forall a, b \in R.$

- **Cuadrado de un binomio:** El cuadrado de una suma de dos números es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término. En símbolos escribimos:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ o $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\ \forall a, b \in R$

Por ejemplo:

a) $(2+5)^2 = 2^2 + 2.2.5 + 5^2$

b)$(3-5)^2 = \left(3+(-5)\right)^2 = 3^2 + 2.3.(-5) + (-5)^2 = 3^2 - 2.3.5 + 5^2$

Estas identidades surgen fácilmente aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta, y suelen ser muy útiles a la hora de realizar ciertos cálculos.

Racionalización de denominadores: Es el procedimiento que nos permite escribir expresiones equivalentes sin utilizar raíces en el denominador. Consideremos dos casos:

- El denominador sea un único término con raíz de la forma $\sqrt[n]{a^p}$, en cuyo caso se multiplica numerador y denominador por la misma raíz de índice n, la misma base a y un nuevo exponente m tal que m + p = n.

Ejemplo: Dada la expresión $\dfrac{\sqrt{2}+3}{3.\sqrt[5]{x^2}}$, $x \neq 0$ racionalizamos de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt{2}+3}{3\cdot\sqrt[5]{x^2}} = \frac{\sqrt{2}+3}{3\cdot\sqrt[5]{x^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\sqrt[5]{x^3}}{3\cdot\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\left(\sqrt{2}+3\right)\sqrt[5]{x^3}}{3x}$$

- El denominador tenga un binomio, donde uno o los dos términos son raíces cuadradas, en cuyo caso se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador con el fin de que surja una diferencia de cuadrados.

Recordemos que si a y b son números reales se dice que el conjugado de (a + b) es (a – b).

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-3}{1-3} = \frac{\sqrt{3}-3}{-2} = \frac{-\sqrt{3}+3}{2}$$

Relación de Orden

La relación de orden definida para los números enteros y/o racionales, también es válida para los números reales.

Recordemos la definición de relación de orden*:*
a < *b* sí y sólo sí *a* - *b* es un número negativo.

Propiedades de la relación de orden

Si $a, b \in R$, se cumple una y sólo una de las tres afirmaciones siguientes:

$$a = b,\ a > b,\ a < b,$$

- Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
- $Si\ a < b\ y\ c > 0\ entonces\ ac < bc$.
- $Si\ a < b\ y\ c < 0\ entonces\ ac > bc$.

Para la resolución de los ejercicios es importante que tengas en cuenta el significado de las propiedades mencionadas.

Observa que cuando se suma un número cualquiera o se multiplica por un número positivo a ambos miembros de una desigualdad, la misma no varía. Mientras que, si se multiplica por un número negativo, *la desigualdad se invierte*.

Intervalos

Entre los conjuntos de números que usaremos más a menudo se encuentran los ***Intervalos.*** En forma general los podemos definir como un subconjunto de los números reales.

Existen distintos tipos de intervalos, como se muestra a continuación:

Se llama *intervalo abierto* de extremos *a* y *b* al conjunto de los números reales *x* que están entre *a* y *b*, sin tener en cuenta los extremos. Se lo denota como *(a,b)*.
Los números reales *x* del intervalo abierto *(a,b)* son aquellos para los que *a* < *x* < *b*. Usando la notación de conjuntos queda

$$(a,b) = \{x \in R\ : a < x < b\}.$$

Esta igualdad se lee: *el intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto de los números reales x tales que x es mayor que a y menor que b*.

Consideremos dos números reales fijos a y b, con a < b.

Gráficamente se lo representa en la recta numérica o recta real de la siguiente forma:

Fig. 6. Representación de un intervalo abierto en la recta

Si a = b entonces (a,b) = (a,a), luego el intervalo no tiene ningún elemento o sea (a,b)= ∅.

Un intervalo cerrado de extremos a y b, es el conjunto de los números reales x que están entre a y b, incluyendo los extremos. Lo denotamos como [a,b].

Los números reales *x* del intervalo cerrado [*a*,*b*] son aquellos para los que $a \leq x \leq b$. Usando la notación de conjuntos es:

$$[a,b] = \{x \in R \ : a \leq x \leq b\}$$

Esta igualdad se lee: *el intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto de los números reales x tales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b.*

La diferencia entre un intervalo abierto y uno cerrado es que el primero no contiene los valores extremos y el segundo sí.

Gráficamente se lo representa en la recta numérica de la siguiente forma:

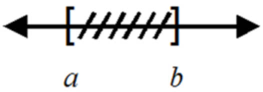


Fig. 7. Representación de un intervalo cerrado

Si a = b entonces [a,b] tiene un solo elemento y se escribe [a,b] = {a} = {b}.

Además de intervalos abiertos y cerrados podemos considerar los intervalos semi-abiertos.

Se llama intervalo ***abierto a la derecha*** de extremos a y b al conjunto de los números reales *x* tales que $a \leq x < b$ y se escribe $[a,b)$.

Es decir $[a,b) = \{x \in R \ : a \leq x < b\}$

Se lee: *el intervalo abierto a la derecha de extremos a y b es el conjunto de los números reales x tales que son mayores o iguales que a y menores que b.*

Gráficamente se lo representa en la recta numérica de la siguiente forma:

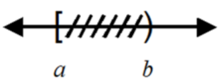


Fig. 8.Representación en la recta de un intervalo abierto a derecha.

Se llama intervalo ***abierto a la izquierda*** de extremos a y b al conjunto de los números reales x tales que $a < x \leq b$ y se escribe $(a,b]$.

Es decir, $(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$

Se lee: *el intervalo abierto a la izquierda de extremos a y b es el conjunto de los números reales x tales que son mayores que a y menores o iguales que b.*

Gráficamente se lo representa en la recta numérica de la siguiente forma:

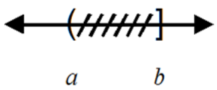
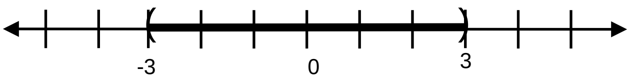


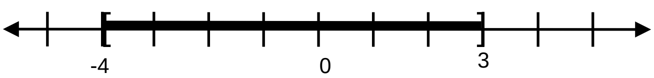
Fig. 9 Representación en la recta de un intervalo abierto a izquierda.

Ejemplo: Analicemos los siguientes intervalos, la forma de expresarlos y su representación gráfica en la recta real.

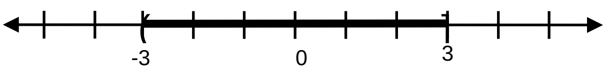
a) Al conjunto $B = \{x \in R : -3 < x < 3\}$ podemos escribirlo como $\mathrm{B} = (-3, 3)$ y lo representamos:



b) Al conjunto $C = \{x \in R : -4 \leq x \leq 3\}$ lo escribimos como $C = [-4{,}3]$ y lo representamos de la siguiente manera.



c) Si $E = \{x \in R : -3 < x \leq 3\}$ entonces $E = (-3{,}3]$ y lo representamos:



¿Los siguientes conjuntos son Intervalos?

$$F = \{x \in R : x > a, a \in R\}$$
$$G = \{x \in R : x \geq a, a \in R\}$$
$$H = \{x \in R : x < a, a \in R\}$$
$$K = \{x \in R : x \leq a, a \in R\}$$

A intervalos como los anteriores los llamaremos **Intervalos Infinitos,**

luego $F = \{x \in R : x > a,\} = \{x \in R : a < x\} = (a, +\infty)$

Estos intervalos se representan gráficamente de la siguiente forma:

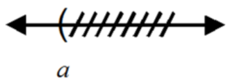


Fig. 10. Representación en la recta de intervalos infinitos

El símbolo $+\infty$ se lee “más infinito” y $-\infty$ se lee “menos infinito”. No son números, son solamente símbolos convencionales para indicar que se consideran todos los números hacia la derecha (o hacia la izquierda) de un punto fijo *a* .

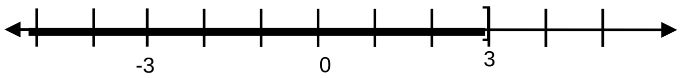
Intenta escribir y representar gráficamente en la recta real los demás conjuntos dados en el párrafo anterior.

Un conjunto de números reales no necesita ser obligatoriamente un intervalo.

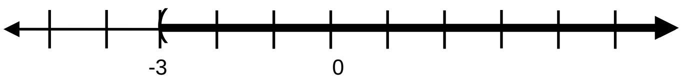
Por ejemplo, si consideramos el conjunto de los números naturales, se ve que tiene infinitos elementos aislados y no es un intervalo. Dentro de los subconjuntos de la recta hay gran variedad de posibilidades, conjuntos con un número finito de puntos, combinaciones de intervalos, etc.

A continuación, mostramos intervalos infinitos y sus distintas representaciones.

a) $E=\{x\in R: x\leq 3\}$ podemos escribirlo como $E=(-\infty,3]$ y representarlo



b) $G=\{x\in R: -3<x\}$ podemos escribirlo como $G=(-3,\infty)$ y representarlo



Ejemplo: Dados los siguientes conjuntos de números reales:

$$B=\{x\in R: -1<x<3\};C=\{x\in R: 2\leq x\leq 5\};D=\{x\in R: -2<x\leq 0\}$$

Determinar cuáles son los números que están:

a)en *B* o en *C*.

b) en *B* o en *C* o en *D,*

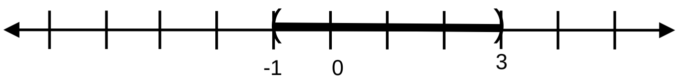
c) en *B* y *C* al mismo tiempo

d) los que están en los tres simultáneamente.

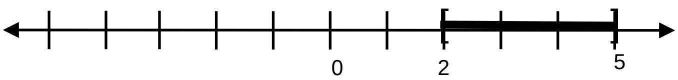
Solución

Primero reconozcamos gráficamente cada conjunto para luego responder

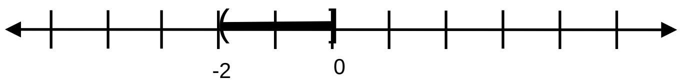
$$B=\{x: -1<x<3\}=(-1,3)$$



$$C=\{x: 2\leq x\leq 5\}=[2,5]$$



$$D=\{x:-2<x\le 0\}=(-2,0]$$



a) Elementos que están en B o en C, se escribe $B\cup C$, para este caso resulta

$$B\cup C=(-1,5]$$

b) Elementos que están en B o en C o en D, se escribe $B\cup C\cup D$, en este ejemplo

$$B\cup C\cup D=(-2,5]$$

c) Elementos que están en B y C al mismo tiempo, se escribe $B\cap C$, en este ejemplo resulta,

$$B\cap C=[2,3)$$

d) Elementos que están en los tres conjuntos simultáneamente, es decir en B, en C y en D, se escribe $B\cap C\cap D$ y, en este ejemplo resulta,

$$B\cap C\cap D=(B\cap C)\cap D=[2,3)\cap(-2,0]=\varnothing$$

Actividades

1) Expresa en lenguaje simbólico los siguientes enunciados:
   a. Un número par.
   b. Un número par siguiente a 2n.
   c. Tres números pares consecutivos.
   d. El triple de un número impar.
   e. El cuadrado de la suma de dos números.
   f. La suma de los cubos de dos números.
   g. La diferencia de un número y su cuadrado.
   h. El cuadrado de un número más el doble del mismo número.

2) Expresa en lenguaje coloquial o natural

a) $2x$ b) $\frac{x^2}{2}$ c) $\frac{x}{2}$

d) $a^2 + b^2$ e) $x^2 - \frac{x}{2}$ f) $2.(x^2 - y^2)$

3) Determina el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados.

a) $\forall x \in R, x^2 = x$
b) $\exists x \in R, x^2 = x$
c) $\exists x \in R, 2 \cdot x = x$ d) $\exists x \in N, 2 \cdot x = x$
e) $\forall x \in R, x - 3 < x$

4) Sea A = {1; 2; 3; 4} el conjunto universal. Determina el valor de verdad de cada enunciado.

a) $\forall x, x + 3 < 6$ b) $\exists x, x + 3 < 6$
c) $\exists x, 2x^2 + x = 15$

5) a) Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes conjuntos:

i. los números enteros entre –5,3 y 10,5,
ii. los números naturales entre –5,3 y 10,5,
iii. los números reales entre –5,3 y 10,5.

b) ¿Cómo puedes representar los números racionales entre –5,3 y 10,5?
c) ¿Qué puedes notar en la representación de los conjuntos anteriores?

6) Indica si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes:

a) $\left(\sqrt{2} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{2} + 3\right)^2$ es un número irracional.

b) $(\sqrt{2} - 3)^2 . (\sqrt{2} + 3)^2$ es un número entero.

c) $(\sqrt[3]{9})^2 - (\sqrt[3]{8})^2 = \left(\left(\sqrt[3]{9}\right) - \left(\sqrt[3]{8}\right)\right) \cdot \left(\left(\sqrt[3]{9}\right) - \left(\sqrt[3]{8}\right)\right)$

d) $\left(\sqrt[3]{7} + 5\right)^2 = \sqrt[3]{49} + 25$

7) Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos y luego represéntalos sobre la recta real:

a) $A = \{x \in R : -3 \leq x \leq 4{,}5\}$
b) $B = \{x \in R : 1 < x \leq 6\}$
c) $C = \{x \in R : -4{,}5 < x < -1{,}5\}$
d) $D = \{x \in R : 0 < x < 2{,}5\}$

8) Escribe en lenguaje simbólico y grafica sobre la recta real los intervalos:

a) A = $(-\infty;3]$
b) B = $[4; +\infty)$
c) C = $(-6; +\infty)$

9) Dados los intervalos A = [-1; 3] y B = (-2; 2);U=R

Encuentra los conjuntos A $\cup$ B, A $\cap$ B, A^c
Representa gráficamente los conjuntos anteriores.

Notación científica

Actividad 1: Resolver las siguientes multiplicaciones. Puedes utilizar la calculadora si tienes dudas:

a) 6 . 10 000=	d) 6 . 100 000 =	g) 6 . 1 000 000=
b) 6,5 . 10000=	e) 6,5 . 100 000=	h) 6,5 . 1 000 000=
c) 2,54 . 10000=	f) 2,54 . 100 000 =	i) 2,54 . 1 000 000=

Escribe como potencias de diez los siguientes factores de estas multiplicaciones:

10 000 = 10… 100 000= 10….. 1000000= 10….

Ahora responde; ¿Qué efecto provoca en un número decimal la multiplicación de ese decimal por una potencia de 10 de exponente natural?

Actividad 2: Resolver con o sin calculadora las siguientes divisiones:

a) 6 : 10 000=	f) 65,4 : 100 000 =
b) 6,5 : 10000=	g) 6 : 1 000 000=
c) 65,4 : 10000=	h) 6,5 : 1 000 000=
d) 6 : 100 000 =	i) 65,4 : 1 000 000=
e) 6,5 : 100 000=	

¿Qué efecto provoca en un número decimal la división de ese decimal por una potencia de 10?

Actividad 3: Indica si es verdadero o no el siguiente razonamiento:

$$6{,}5:1000000 = 6{,}5.\frac{1}{1000000} = 6{,}5.\left(\frac{1}{10}\right)^{6} = 6{,}5.10^{-6}$$

Escribe las divisiones de la actividad 2 como multiplicaciones por potencia de diez.

Luego, la multiplicación de un número decimal por una potencia de diez de exponente un entero negativo, ¿Qué efecto provoca en dicho decimal?

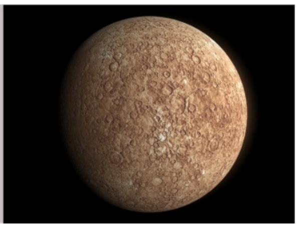
Actividad 4: Realiza las siguientes cuentas con calculadora y registra la solución que obtenés

a) 26 . 1000000000000=
c) 3,5 . 1 000 000 000 000=
b) 108 . 1000000000000000=
d) 2,45 . 1 000 000 000 000 000=

Ahora con los mismos números, realiza las siguientes divisiones:

a) 26 : 1000000000000=
b) 108 : 1000000000000000=
c)3,5 : 1 000 000 000 000=
d) 2,45 : 1 000 000 000 000 000=

En el día de la fecha, Mercurio se encuentra a una distancia aproximada de 5,791 . 10^7 km del Sol, mientras que Neptuno está ubicado a una distancia aproximada de 4,5043 . 10^9 km del Sol.



Compartí las respuestas con tus compañeros e interpreta cómo hacen algunas calculadoras para expresar números muy grandes o muy pequeños de modo abreviado:

¿Qué diferencia encuentran entre la escritura de números muy grandes o muy pequeños? ¿Por qué piensan que es así?

Actividad 5: Completa los espacios vacíos con una potencia de diez para que se mantenga la igualdad entre las expresiones dadas:

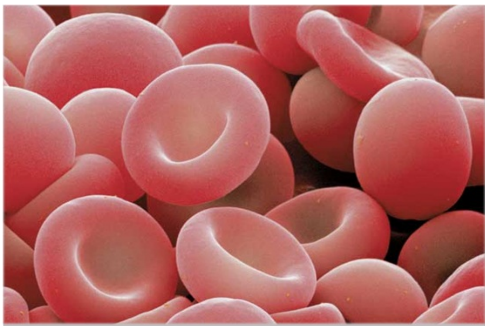
a) 60 000 000 = 6 . 10.....
b) 150 000= 1,5 .10.....
c) 2 410 000 000 = 2,41 .10.....
d) 0,00009 = 9 .10.....
e) 0,000 000 037 = 3,7 .10.....
f) 0,000 000 002 04 = 2,4 .10.....

Actividad 6: Lee el siguiente extracto de una nota científica y responde:

a) ¿Cuál de los dos planetas está más cerca del sol? Explica cómo te diste cuenta.

b) Analiza las escrituras de las distancias de los planetas al Sol en el artículo ¿Cómo se expresan?

c) Lee ahora el siguiente artículo. El tamaño del diámetro de los glóbulos rojos y blancos de la sangre es muy pequeño. ¿Cómo se expresan esos valores?



La sangre está formada, entre otras cosas, por glóbulos rojos y glóbulos blancos.
Los glóbulos rojos de la sangre son de un tamaño estándar de aproximadamente 6 a 8. 10^{-4} cm de diámetro. En cambio, los glóbulos blancos tienen un tamaño que oscila entre 8 y 20. 10^{-4} cm.

d) ¿Cuáles son más grandes, los glóbulos blancos o los glóbulos rojos? ¿Cómo te diste cuenta?

e) Los artículos científicos utilizan este modo de expresar los valores numéricos muy grandes o muy pequeños. ¿Por qué piensan que lo hacen?

Actividad 7: La masa de un virus está en el orden de 10^{-18} g., la masa del hombre es de 70 kg. y a de la tierra 5.9×10^{24} kg.

¿Cuánto mayor es la masa del hombre con respecto a la masa de un virus?

¿Cuánto mayor es la masa de la tierra con respecto a la del hombre?

Actividad 8: ¿Cuántas veces es menor la luna que la tierra si el volumen estimado de la luna es $21{,}9 \times 10^9$ km^3 y el volumen de la tierra es de alrededor de $1{,}08 \times 10^{12}$ km^3 ?

Cierre: ¿A qué se llama notación científica?

Notación Científica es una determinada forma de escritura de números decimales. Se dice que se está utilizando esta notación cuando el número es escrito de la forma $\mathbf{d \times 10^n}$ dónde "d" es un número decimal cuyo valor absoluto es mayor o igual que 1 y menor que 10, y "n" es un número entero.

Volver

Parte II: Expresiones algebraicas y ecuaciones

En esta parte recordaremos qué es una expresión algebraica y la importancia de determinar su dominio. Además, hallaremos expresiones idénticas a una dada y luego definiremos cuándo tales expresiones idénticas se pueden considerar expresiones algebraicas equivalentes. Por último, abordaremos el tema de ecuaciones y determinaremos el conjunto solución.

1. Expresiones algebraicas

Recuerda que una expresión algebraica es una combinación finita de variables y números con operadores matemáticos, como por ejemplo, la resta, el producto, la división y la potencia. Es decir, en una expresión algebraica están indicadas operaciones entre números y letras.

Ejemplo: Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$Q(x) = 3 + 2x^5 - 5x^2$$
$$P(x) = x^2 + 2$$
$$R(x) = 2x^7 - 3x^4 + x$$
$$T(x) = 1$$

Estas expresiones son polinomios de grados 5, 2, 7 y 0 respectivamente.

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas, que no son polinomios, pues sus potencias no son números naturales son:

$$3x^{-2} - 3x + 8\ ;\ x^{-1} + 1.$$

A las expresiones que resultan de un *cociente de polinomios* las llamamos ***expresiones algebraicas racionales***. Por ejemplo:

$$\frac{2-5x^2}{10x}\ ;\ \frac{(3-x)-(2x-1)}{x^3+x}$$

Cuando trabajamos con expresiones algebraicas debemos tener en cuenta su *dominio,* es decir en qué conjunto de números reales podemos realizar las operaciones indicadas.

Otras expresiones algebraicas que no son polinómicas ni racionales son:

$$\frac{2 - 5x^{-3}}{10\sqrt[5]{x}}; \qquad \frac{\sqrt{x-5}}{2x-3}$$

A continuación, vamos a determinar el dominio de algunas expresiones algebraicas, para mostrar cómo se debe trabajar en estos casos y que te sirvan de guía para encontrar la solución de las actividades propuestas.

Ejemplo: ¿Cuál es el dominio de la siguiente expresión algebraica?

$$\frac{1}{x^2-4}$$

Solución

En esta expresión racional la operación principal es la división, y como **no podemos dividir por cero,** entonces analizamos cuando el denominador de la expresión es cero, es decir:

$$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4}$$

Entonces los valores x=2 y x=-2 no pueden estar en el dominio, (sino dividiríamos por cero), es decir, el dominio de la expresión racional dada es el conjunto formado por todos los números reales excepto (-2) y 2.

En símbolos:

$$Dom\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = R - \{2,-2\} = (-\infty,2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$$

Ejemplo: ¿Cuál es el dominio de la siguiente expresión algebraica?

$$\frac{x^2+10x+25}{2x^2-50}$$

Solución

Al igual que en el Ejemplo 1, en esta expresión racional la operación principal es la división, tanto el numerador como el denominador son polinomios que tienen como dominio R Como no podemos dividir por cero, entonces analizamos cuando el denominador de la expresión es cero, es decir:

$$2x^2 - 50 = 0 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = \frac{50}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{25}$$

Entonces los valores x=5 y x=-5 no pueden estar en el dominio, (porque sino dividiríamos por cero), luego el dominio de la expresión racional es el conjunto de todos los números reales, excepto el -5 y el 5.

En símbolos:

$$Dom\left(\frac{x^2 + 10x + 25}{2x^2 - 50}\right) = R - \{5,-5\} = (-\infty,-5) \cup (-5,5) \cup (5,+\infty)$$

Ejemplo: Encontremos el dominio de la siguiente expresión algebraica.

$$\frac{2x - 1}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}}$$

Solución

Esta expresión es un cociente entre un polinomio (en el numerador) y una raíz de orden impar en el denominador, ambos poseen como dominio a los números reales. El problema se presenta nuevamente cuando el denominador es cero. Esto nos lleva a buscar los valores de *x* que lo anulan, es decir:

$$x^2 + 4x + 3$$

Para encontrar los ceros de esta ecuación podemos aplicar la fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

La fórmula para calcular la solución de una ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

está dada por

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

En este caso como a= 1, b= 4 y c = 3, resulta

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

Obtenemos así los valores $x_1 = -3, x_2 = -1$ que son los valores que debemos excluir del dominio, entonces:

$$Dom\left(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2+4x+3}}\right)=R-\{-3,-1\}=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$$

Ejemplo: Dada la expresión algebraica $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, hallemos su dominio.

Solución

Una vez más la operación principal es la división y está definida si el denominador $(x-1)$ es distinto de cero. Pero en esta ocasión, el numerador es una raíz de índice par, que está definida si el radicando $(x+1)$ es mayor o igual que cero. Entonces para determinar el conjunto dominio planteamos las siguientes condiciones:

Denominador no nulo, esto es: $(x-1)\neq 0$

Los valores de *x*, que verifiquen que: $(x+1)\geq 0$

Para analizar la primera condición planteamos:

$x-1=0 \Longrightarrow x=1$. Entonces debemos excluir del dominio el valor de *x* que anula al denominador, es decir, excluimos del dominio al valor *x* = 1.

De la segunda condición resulta: $x+1\geq 0 \Longrightarrow x\geq -1$.

Ahora bien, para determinar el dominio de $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ debemos tener en cuenta los valores dados por las *dos condiciones planteadas*, en este caso: *Todos los números reales mayores o iguales a (-1) y distintos de 1*.

A este conjunto lo podemos escribir de distintas formas, entre ellas:

$$Dom\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)=R-\{1\}\cap[-1,+\infty)=[-1,1)\cup(1,+\infty)$$

Expresiones Algebraicas Equivalentes

El manejo de expresiones algebraicas y la destreza para transformarlas en expresiones equivalentes es muy importante cuando queremos estudiar y trabajar con objetos matemáticos, por lo tanto resulta fundamental practicar con ellas.

En la parte anterior vimos algunas identidades que son muy utilizadas para operar con expresiones algebraicas, por ejemplo, el cuadrado de un binomio, la diferencia de cuadrados y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma (o resta). También ya definimos cuando dos números fraccionarios sonequivalentes, por ejemplo $\frac{12}{144}=\frac{4}{48}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$; aquí se ha simplificado la fracción original hasta llegar a otra expresión del mismo número, la cual es una fracción irreducible.

En esta sección haremos hincapié en el trabajo con expresiones algebraicas fraccionarias como las vistas en los Ejemplos 1, 2, 3 y 4. Buscamos una expresión más simple que facilite los cálculos, es decir, simplificar la expresión cuando sea posible.

A continuación, analizaremos algunos ejemplos mostrando como se opera para encontrar expresiones algebraicas equivalentes a las dadas.

Ejemplo: Si es posible, escribe la expresión algebraica irreducible de la expresión $\dfrac{2x+x^2}{x}$.

Solución

En primer lugar, calculemos el dominio de la expresión. Como es un cociente de polinomios (expresión racional), debemos ver que no se anule el denominador, es decir plantear que el denominador sea distinto de cero, en este caso: $x \neq 0$. Como el único valor que anula el denominador es $x = 0$,entonces

$$Dom\left(\frac{2x+x^2}{x}\right)=R-\{0\}$$

Propiedad distributiva:

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$
$$\forall a,b,c \in R$$

Buscamos ahora expresiones equivalentes de la expresión dada, en esta ocasión, si sacamos factor común x en el numerador resulta.

$$\frac{2x+x^2}{x}=\frac{x(2+x)}{x}$$

¿Podemos simplificar *x* del numerador y del denominador en la expresión anterior?

Sí, pues $x=0 \notin \mathrm{Dom}\left(\frac{2x+x^2}{x}\right)$.

Entonces

$$\frac{2x+x^2}{x}=\frac{x(2+x)}{x}=2+x$$

Luego,

$$\frac{2x+x^2}{x}=2+x$$

La expresión del segundo término es más simple que la del primer término. Además, cualquier valor *x* perteneciente al $Dom\left(\frac{2x+x^2}{x}\right)=R-\{0\}$ verifica la igualdad. Esto significa que las expresiones $\left(\frac{2x+x^2}{x}\right)$ y $(2+x)$ son equivalentes en $Dom\left(\frac{2x+x^2}{x}\right)=R-\{0\}$

Observación

Si tenemos la siguiente expresión $\left(\frac{2x^3+x^2}{x}\right)$ podemos factorizarla de la siguiente forma $\frac{2x^3+x^2}{x}=\frac{x^2(2x+1)}{x}$

En la expresión anterior ¿podemos simplificar una *x* del numerador con la del denominador para todo valor de $x \in \mathrm{R}$?

No, si *x*=0 no es posible hacer esa simplificación. ¿Por qué?

Ejemplo: Encontremos la expresión algebraica irreducible de la expresión $\frac{x-2}{x^2-4}$.

Solución

Calculemos primero el dominio de la expresión $\frac{x-2}{x^2-4}$, como es también un cociente de polinomios, debemos ver que el denominador no se anule, es decir, plantear que el denominador sea distinto de cero, esto es: $x^2 - 4 \neq 0$. Los valores que anulan el denominador son $x = -2$y $x= 2$, entonces

$$Dom\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) = R - \{-2,2\}$$

Buscamos ahora expresiones equivalentes a la dada, aquí podemos factorizar usando diferencia de cuadrados, entonces el denominador resulta

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

Diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$\forall a, b \in R$$

¿Podemos simplificar (x-2) en el numerador y en el denominador de la expresión anterior?

Si, pues $x = 2 \notin \mathrm{Dom}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$.

Luego,

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Entonces

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$$

y $\mathrm{Dom}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) = R - \{-2,2\}$

Esto significa que las expresiones $\frac{x-2}{x^2-4}$ y $\frac{1}{x+2}$ son equivalentes en

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=R-\{-2,2\}$$

Ejemplo: En caso de ser posible, determinemos la expresión algebraica irreducible a la expresión dada en el Ejemplo 2.

Solución

$$\frac{x^2+10x+25}{2x^2-50}=\frac{(x+5)^2}{2(x^2-25)}$$

Cuadrado de un binomio:

$$a^2 \pm 2.a.b+b^2=(a\pm b)^2$$
$$\forall a,b\in R$$

El numerador es el desarrollo del cuadrado de un binomio, lo reemplazamos por su identidad. En el denominador sacamos factor común 2 y queda una diferencia de cuadrados.

$$\frac{x^2+10x+25}{2x^2-50}=\frac{(x+5)^2}{2(x^2-25)}=\frac{(x+5)^2}{2(x+5)(x-5)}$$

Reemplazamos la diferencia de cuadrados del denominador por su identidad.

Como es posible cancelar (x+5) del numerador y del denominador resulta.

$$\frac{x^2+10x+25}{2x^2-50}=\frac{(x+5)^2}{2(x+5)(x-5)}=\frac{x+5}{2(x-5)}$$

De esta manera $\dfrac{x^2+10x+25}{2x^2-50}=\dfrac{x+5}{2(x-5)}$. Entonces $\dfrac{x^2+10x+25}{2x^2-50}$ es equivalente a la expresión algebraica irreducible $\dfrac{x+5}{2(x-5)}$ en el $\mathrm{Dom}\left(\dfrac{x^2+10x+25}{2x^2-50}\right)=R-\{-5,5\}$

Ejemplo: Dada la expresión $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$, hallemos su dominio y su expresión irreducible.

Solución

Como en los casos anteriores determinaremos el dominio de la expresión racional. Tenemos nuevamente un cociente de polinomios, entonces el dominio son todos los números reales que no hacen cero el denominador. Esto nos lleva a plantear la siguiente condición:

$$x^2 - 1 = 0\,,$$

En este caso podemos usar una identidad conocida y escribimos

$$0 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Ahora es fácil establecer en qué valores se anulará el denominador de la expresión; esto es $x = 1$ y $x = -1$, entonces

$$\text{Dom}\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}\right) = R - \{-1,1\}$$

Ahora tratemos de escribir expresiones equivalentes a la expresión dada:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

(En el numerador hemos sacado factor común *x* y en el denominador hemos factorizado usando diferencia de cuadrados).

Ya que es posible cancelar (*x*-1) del numerador y del denominador, pues $1 \notin \text{Dom}\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}\right)$ entonces $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1}$

La expresión del segundo miembro es más simple que la del primer miembro. Además, cualquier valor de *x* perteneciente al

$\text{Dom}\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}\right) = R - \{-1,1\}$ verifica la igualdad.

Las expresiones $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ y $\dfrac{x}{x+1}$ son equivalentes en el dominio $R - \{-1{,}1\}$.

Además, $\dfrac{x}{x+1}$ es la menor expresión equivalente de $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$.

Ejemplo: Dada la expresión $\dfrac{4x^2 - 25}{\sqrt{2x} - \sqrt{5}}$, determinemos una expresión algebraica equivalente e irreducible.

Solución

Para dar la respuesta, primero determinemos el dominio de la expresión algebraica y luego encontremos una expresión equivalente.

La expresión dada es un cociente. El dominio del polinomio del numerador es el conjunto R. Entonces, para determinar el dominio de la expresión dada hay que analizar el denominador, debemos pedir que no se anule.

Además, debemos ver cuando una raíz de índice par tiene como resultado un número real; esto sucede cuando el radicando es **positivo o cero**. A estas condiciones las planteamos de la siguiente forma:

$$\sqrt{2x} - \sqrt{5} \neq 0 \ y \ \ 2x \geq 0$$

Luego resulta que si $2x \geqslant 0$, entonces $x \geqslant 0$

Hagamos el análisis de esas dos condiciones:

Para que se cumpla la primera, buscamos el o los valores que verifican $\sqrt{2x} - \sqrt{5} = 0$ para excluirlos del dominio. Luego,

$$\sqrt{2x} - \sqrt{5} = 0 \Longrightarrow \sqrt{2x} = \sqrt{5} \Longrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow x = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

es decir que $x = \frac{5}{2} \notin Dom\left(\frac{4x-25}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}\right)$.

Para que la raíz cuadrada este definida en $\mathbb{R}$ **,** es necesario que el radicando sea positivo, o sea que $2x \geq 0$, es decir $x \geq 0$.

Teniendo en cuenta los requerimientos establecidos resulta:

$$Dom\left(\frac{4x-25}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}\right)=\left[0,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$$

Como ya hemos determinado el Dominio de la expresión algebraica, ahora hallemos una expresión equivalente irreducible. Para ello podemos operar de la siguiente manera (no hay una única forma de hacerlo).

$$\frac{4x^2-25}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}=\frac{(2x)^2-5^2}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}=\frac{(2x-5)(2x+5)}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{5}}{\sqrt{2x}+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{(2x-5)(2x+5)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$
$$=\frac{(2x-5)(2x+5)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)}{2x-5}$$
$$=(2x+5)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)$$

Trata de justificar por qué es posible simplificar en la última igualdad.

Luego, $(2x+5)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)$ es la expresión equivalente irreducible de $\frac{4x^2-25}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}$ en $\left[0,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$. En símbolos es:

$$(2x+5)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)=\frac{4x^2-25}{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}\quad \forall x\in R/\ x\in\left[0,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

Ejemplo: Multiplicación de expresiones racionales.
Realiza la multiplicación indicada y simplifica:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}.\frac{3x+12}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2}.\frac{3(x+4)}{x-1}=\frac{3(x+3)}{(x+4)}$$

Para dividir expresiones racionales, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}$$

Esto dice que, para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

Ejemplo: División de expresiones racionales
Realiza la división indicada y simplifica:

$$\frac{x-4}{x^2-4}:\frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}=\frac{x-4}{(x-2)(x+2)}.\frac{(x+2)(x+3)}{(x-4)(x+1)}$$

$$=\frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)}=\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$

Suma y resta de expresiones racionales

Para sumar o restar expresiones racionales, primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el mínimo común múltiplo. Este se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

Ejemplo: Sumar y restar expresiones racionales
Realiza las operaciones indicadas y simplifica:

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{-x+3}{(x-1)(x+1)^2}$$

Actividades

1) Simplificar cada una de las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{15a^3b^2}{5ab^4}$

b) $\frac{7mn^4p^5}{21m^3np^7}$

c) $\frac{27m}{36m}$

d) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$

e) $\frac{a^2+2ab+b^2}{3a+3b}$

f) $\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}$

g) $\frac{(8p^3q^2)^4}{(16p^2q^2)^3}$

h) $\frac{x(x-3)^2(x-1)}{x^2(x-1)^3(x-3)^4}$

i) $\frac{x^4-1}{3x^2-3}$

j) $\frac{2ax-4bx}{3ay-6by}$

k) $\frac{121a^4c^5d^7}{11ac^5d^8}$

l) $\frac{8a-16b}{24}$

2) Calcula la adición o sustracción de las siguientes fracciones algebraicas y simplifique cuando proceda:

a) $\frac{9}{x}+\frac{5}{x}-\frac{7}{x}$

b) $\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^2}-\frac{9}{a^2}$

c) $\frac{4m}{2m+5}+\frac{5m+6}{2m+5}-\frac{7m+8}{2m+5}$

d) $\frac{7}{a^2-3a-4}+\frac{2a-5}{a^2-3a-4}$

3) Calcula las siguientes sumas o restas y simplifica cuando proceda:

a) $\dfrac{m-2}{8m}+\dfrac{3m-1}{5m}$

b) $\dfrac{2}{a^2-1}+\dfrac{3a}{a^2-a-2}$

c) $m-2-\dfrac{5}{m+1}$

d) $\dfrac{x}{x-2y}-\dfrac{2xy}{x^2-2xy}+\dfrac{y}{x}$

e) $\dfrac{p+17}{p^2-p-12}-\dfrac{6}{p^2-2p-8}$

f) $\dfrac{9}{18-3x-x^2}+\dfrac{4x-5}{x^2+x-12}$

g) $\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{7}{2x}-\dfrac{5}{3x}$

h) $\dfrac{d+1}{d-3}+\dfrac{d}{d+3}-\dfrac{6(d+1)}{d^2-9}$

4) Multiplica y simplifica las expresiones.

a) $\dfrac{2xy^4}{3a^3b}\cdot\dfrac{5x^3y}{7ab^4}$

b) $\dfrac{3(a-b)}{2x}\cdot\dfrac{-17(a-b)}{19x^3}$

c) $\dfrac{-x^3y^4}{x^4y^5}\cdot\dfrac{x^7y^8}{-x^{15}y^3}$

d) $\dfrac{x^2y^3}{(a^3b^4)^5}\cdot\dfrac{(a^2b^3)^4}{(x^2y)^5}$

e) $\dfrac{a^2+9a+18}{a^2+8a+15}\cdot\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+11a+18}$

f) $\dfrac{z^2-10z+16}{z^2-9z+14}\cdot\dfrac{z^2-10z+21}{z^2+2z-15}$

5) Calcula el cociente entre las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{35a^3}{18b^3}:\dfrac{14ab^2}{9b^3}$

b) $\dfrac{a^5b^8c^7}{a^4b^6c^{10}}:\dfrac{a^6b^8c^9}{a^3b^2c^5}$

c) $\dfrac{6x^2+9xy}{a^3}:\dfrac{a}{14x^3+21x^2y}$

d) $\dfrac{a^3+a}{a^2-a}:\dfrac{a^3-a^2}{a^2-2a+1}$

e) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2}:\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}$

f) $\dfrac{x^3-x}{x+1}:\dfrac{x-1}{x+1}$

g) $\dfrac{m^2+8m+16}{m^2+2m-8}:\dfrac{m^2-2m-3}{m^2-3m+2}$

h) $\dfrac{m^2-3m+2}{m^2-5m+4}:\dfrac{m^2+6m-16}{m^2+m-20}$

6) Simplifica las fracciones complejas:

a) $\dfrac{y-\dfrac{x^2}{y}}{\dfrac{y^2}{x}-x}=$

b) $\dfrac{2-\dfrac{5}{x}}{4-\dfrac{25}{x^2}}=$

c) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}}=$

d) $\dfrac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}=$

e) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{y}}=$

f) $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2}{x^2-1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}=$

Volver

2. Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones que contiene valores conocidos (constantes) y valores desconocidos (variables) relacionados mediante operaciones matemáticas.

En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra x representa a la variable. Consideramos $x$como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera.

Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan**soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de ecuaciones equivalentes.

Para resolver una ecuación, buscamos ecuaciones equivalentes más sencillas usando propiedades.

Como buscamos encontrar el valor de la incógnita, una vez resuelta la ecuación es importante verificar la solución y la respuesta que se busca.

Ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una ecuación lineal, o ecuación de primer grado, que es equivalente a una de la forma

$$a\,x + b = 0$$

donde ay $b$son números reales y $x$es la variable.

x =3 es una solución de la ecuación

4*x* +7 = 19,

porque sustituir *x* = 3

hace verdadera la ecuación:

4.(3) +7 = 19.

Esta es la **verificación** de la ecuación.

Ejemplo: La ecuación $7x + 4 = 5 - 3x + 7$ es lineal porque es equivalente a $10x - 12 = 0$

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con a ≠ 0.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse factorizando y usando la siguiente propiedad básica de números reales.

$$A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad oB = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar uno de los miembros de una ecuación cuadrática (o de grado mayor) entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez.

Este método funciona sólo cuando uno de los miembros de la ecuación es 0.

Otro tipo de ecuaciones

Hasta aquí hemos recordado las ecuaciones lineales y las cuadráticas.

A continuación, estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

Ejemplo: Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$$

Ejemplo: Una ecuación que contiene un radical

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más soluciones extrañas, es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original.

En el Ejemplo anterior el valor $x = 1$ es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera.

Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = (1)^2$.

Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original.

Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las soluciones para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.

A continuación, veremos cuatro ejemplos que ilustran la forma de resolver ecuaciones empleando expresiones equivalentes.

Ejemplo: Encuentra los valores de x que verifican $(x+2)(x-5) = (x+2)(1-x)$

Solución

El primer paso es determinar el dominio de la ecuación. En este caso es: R.

Se resuelve ahora la ecuación:

$$(x+2)(x-5)=(x+2)(1-x)$$

¿Podemos cancelar $(x+2)$ en ambos miembros?

Si, (piensa porqué es posible)

$$(x-5)=1-x$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

El conjunto solución es $S=\{3,-2\}$. ¿Por qué $x=-2$ es también solución?

Ejemplo: Encontremos el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{-2x^2+6x}{x^2-9}-\frac{2x^2}{3x+9}=\frac{-1}{x}$$

Solución

También, como en el caso de las expresiones algebraicas, en primer lugar, tenemos que determinar el dominio de la ecuación, es decir, el conjunto de números reales para los cuales podemos realizar todas las operaciones indicadas.

Esta expresión estará definida para todo número real que no anule **ningún** denominador, algebraicamente esto es,

$$Dom=\{x\in R\ /\ x^2-9\neq 0\wedge 3x+9\neq 0\wedge x\neq 0\}$$

Para caracterizar los números que están en el conjunto dominio procedemos de la siguiente manera:

$$x^2-9=0\Longrightarrow x=\pm 3$$

$$3x+9=0\Longrightarrow x=-\frac{9}{3}=-3$$

$$x=0$$

Con este procedimiento hemos determinado los valores para los cuales la ecuación no está definida, luego el dominio de la ecuación es

$$R-\{-3,3,0\}$$

Una vez que sabemos en qué conjunto se encuentra/n la/s solución/es, transformamos convenientemente las expresiones de la ecuación para hallar el *conjunto solución,* es decir el conjunto de números reales que *satisfacen* la ecuación.

En este caso, una posibilidad es tomar el primer miembro y una vez obtenida una expresión equivalente, igualarla con el segundo miembro.

$$\frac{-2x^2+6x}{x^2-9}-\frac{2x^2}{3x+9}=\frac{-2x^2+6x}{(x-3)(x+3)}-\frac{2x^2}{3(x+3)}=\frac{3(-2x^2+6x)-2x^2(x-3)}{3(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{18x-2x^3}{3(x-3)(x+3)}=\frac{2x(3-x)(3+x)}{3(x-3)(x+3)}=\frac{2x(3-x)}{3(x-3)}$$

$$=\frac{-2x(x-3)}{3(x-3)}=\frac{-2x}{3}$$

Así se ha obtenido una expresión reducida del primer miembro de la ecuación, ahora la igualamos con el segundo miembro para resolverla:

$$\frac{-2x}{3}=-\frac{1}{x}\rightarrow -2x^2=-3\rightarrow x^2=\frac{3}{2}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

obteniendo dos soluciones.

Observa que el *conjunto Solución* de la ecuación está contenido en el *conjunto Dominio* de la ecuación.

Por último, debemos **verificar** que estas soluciones pertenezcan al conjunto dominio de la ecuación. Como el dominio de la ecuación es $R-\{-3,0,3\}$ y las soluciones halladas pertenecen a él, podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es

$$S=\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

Ejemplo: Hallemos los valores que hacen cierta la ecuación

$$\frac{2}{x-3}=x-3+\frac{2}{x-3}$$

Solución

El primer paso es determinar el dominio de la ecuación. En este caso es: $R-\{3\}$, ya que es fácil ver que en 3 se anulan los denominadores de la ecuación.

Se resuelve ahora la ecuación:

$$\frac{2}{x-3}=x-3+\frac{2}{x-3}$$

$$0=x-3+\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-3}$$

$$0 = x - 3$$

La solución obtenida es $x = 3$. ¿Será solución de la ecuación? No, pues *x*=3no pertenece al conjunto dominio de la ecuación. Entonces, la ecuación no tiene solución, es decir, no hay ningún valor real que verifique la igualdad dada. En este caso decimos que el conjunto solución es vacío y *lo expresamos de la siguiente forma:* $S = \emptyset = \{\,\}$.

Ejemplo: Determinemos el o los valores *x* que verifican

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 - 18} = -\frac{3x + 9}{18 - 6x}$$

Solución

Como antes, primero determinamos el dominio de la ecuación, que en este caso resulta ser el conjunto $R - \{-3,3\}$. (Como ejercicio puedes verificarlo).

Resolvemos ahora la ecuación. Una forma de hacerlo es transformar convenientemente de manera conjunta los dos miembros:

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 - 18} = -\frac{3x + 9}{18 - 6x}$$

$$\frac{(x+3)^2}{2(x^2-9)} = -\frac{3(x+3)}{6(3-x)}$$

$$\frac{(x+3)^2}{2(x-3)(x+3)} = -\frac{(x+3)}{2(3-x)}$$

$$\frac{(x+3)}{2(x-3)} = -\frac{(x+3)}{2(3-x)}$$

$$\frac{(x+3)}{2(x-3)} = \frac{(x+3)}{2(-3+x)}$$

$$\frac{(x+3)}{2(x-3)} = \frac{(x+3)}{2(x-3)}$$

$$1 = 1$$

Observar que para realizar los pasos anteriores hemos tenido en cuenta que *x* es distinto de -3. ¿Dónde lo hemos hecho?

Hemos transformado la ecuación, *obteniendo una igualdad.* Esto nos dice que cualquiera sea el valor de *x* obtendremos una igualdad, lo que nos hace pensar que el conjunto solución es $\mathbb{R}$, pero como 3 y -3 no pertenecen al dominio, el conjunto solución es:

$$S = R - \{-3,3\}$$

En los tres últimos ejemplos hemos visto que ***la solución*** de una ecuación **puede ser *un conjunto finito*** (número determinado de soluciones), ***el conjunto vacío*** (no tiene solución en *R*) o ***un conjunto infinito*** (infinitas soluciones).

Actividades

1) Encuentra el Dominio y da la expresión irreducible para las siguientes expresiones algebraicas

a) $\frac{3x^2+12}{x^4-16}$

b) $\frac{3}{(x-2)^2}$

c) $\frac{3}{x^2-4}$

d) $\frac{x^2+9}{(x+3)(x-4)}$

e) $\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$

f) $\frac{(x-1)^2}{x+1}$

g) $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-18}$

h) $\frac{x^2+9}{x^2-x-12}$

i) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$

j) $\frac{-2x}{x-3}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$

k) $\frac{x^2-x}{2x-2}$

2) Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Expresa el conjunto solución y represéntalo en la recta real.

a) $\frac{2x-1}{3}+x=\frac{x-3}{2}-1$ Rta. $S=\left\{-\frac{13}{7}\right\}$

b) $(3x-1)(x+4)=2(3x-1)$ Rta. $S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

c) $(x+2)^2-10=4x+6$ Rta. $S=\{\sqrt{12},-\sqrt{12}\}$

d) $\frac{1}{x-3}=8$ Rta. $S=\left\{\frac{25}{8}\right\}$

e) $\frac{2x-4}{x}=-7$ Rta. $S=\left\{\frac{4}{9}\right\}$

f) $8(2x+10)=2(8x+40)$ Rta. $S=R$

g) $8(3x+10)=28x-14-4x$ Rta. $S=\emptyset$

h) $\frac{x^2+2x-8}{4x+7}$ Rta. $S=\{-3,5\}$

i) $\frac{3x+1}{x+2}=\frac{3x-2}{x+1}$ Rta. $S=\{\emptyset\}$

j) $(x+2\sqrt{10})(x-2\sqrt{10})=9$ Rta. $S=\{-7,7\}$

←Volver

Parte III: Aplicaciones

1. Unidades de medida

Considerando que 1 metro es la milésima parte de un kilómetro,

$$1m = \frac{1}{1000}\ km$$

Y por consiguiente

$$1m = 0{,}001\ km = 10^{-3}\ km$$

A partir de ello contesta:

a) Si un decímetro (dm) representa la décima parte de un metro(m), expresa 1 decímetro utilizando la unidad metro.

$1dm = -m$ o equivalentemente $10{-}dm = 1\ m$

¿Cómo podrías expresar el decímetro utilizando una potencia de diez para la unidad metro?

$$10\ dm = 10{-}\ m$$

b) Si un centímetro (cm) representa la centésima parte de un metro, expresa 1 centímetro utilizando la unidad metro.

$1cm = -m$ o equivalentemente $10{-}cm = 1\ m$

¿Cómo podrías expresar el centímetro utilizando una potencia de diez para la unidad metro?

$$10\ cm = 10{-}\ m$$

c) Si un milímetro (mm) representa la milésima parte de un metro, expresa 1 milímetro utilizando la unidad metro.

$1mm = -m$ o equivalentemente $10{-}mm = 1\ m$

¿Cómo podrías expresar el milímetro utilizando una potencia de diez para la unidad metro?

$$1mm = 10{-}m$$

d) Si un micrómetro (μm) representa la millonésima parte de un metro, expresa 1 micrómetro utilizando la unidad metro.

$$1\mu m = -m$$

¿Cómo podrías expresar el micrómetro utilizando una potencia de diez para la unidad metro?$1\mu m = 10{-}m$

* Siguiendo con este razonamiento es posible expresar:

Nanómetro:

$$1nm\frac{1}{10^{9}}m = 10^{-9}m$$

Armstrong:

$$1\text{Äm} = \frac{1}{10^{10}}m = 10^{-10}m$$

En síntesis

$$\begin{aligned} 1m &= 10^{2}cm \\ &= 10^{3}mm \\ &= 10^{6}\mu m \\ &= 10^{9}nm \\ &= 10^{10}\text{Ä}m \end{aligned}$$

En ciencias experimentales interesan generalmente los submúltiplos del metro porque los elementos con los que trabajan tienen dimensiones por debajo del metro.

Para darnos una idea veamos en forma comparativa el tamaño de distintos objetos.

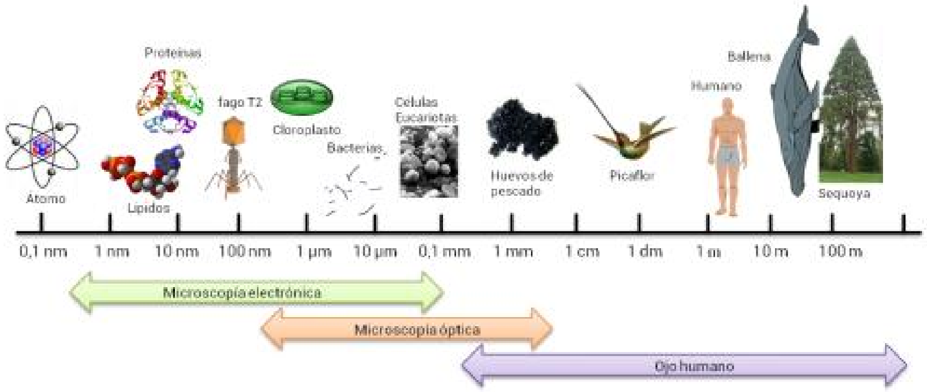


Fig. 11.La figura muestra los tamaños relativos de distintos objetos (incluidos los seres humanos) y los instrumentos necesarios para detectarlos.

En todos los casos nos estamos refiriendo a entidades microscópicas o submicroscópicas. Es decir, no son observables a simple vista.

Como se muestra en la Fig.12, las células de los animales superiores tienen diámetros en el orden de decenas de micrones, en el caso de las plantas hay células cuyo tamaño es de 100 µm o más. Los tamaños de las células del organismo son variables, así, por ejemplo, los glóbulos rojos o hematíes miden 7 µm, los hepatocitos 20 µm, los espermatozoides 53 µm y los óvulos 150 µm. En las células vegetales los granos de polen pueden llegar a medir de 200 a 300 µm y algunos huevos de aves pueden alcanzar entre 1 (codorniz) y 7 centímetros (avestruz) de diámetro. No olvidemos que los huevos son también unicelulares. Entre las células del hombre hay excepciones, las células nerviosas pueden tener filamentos de hasta 1 m de longitud.

Las bacterias que pueden tener formas de esferas o bastones miden entre 1 a 2 μm.

El nanómetro es la unidad de longitud que equivale a una milmillonésima parte de un metro. Se introdujo en 1951 y reemplazó al milimicrón. Es utilizada comúnmente para medir la longitud de onda de la radiación ultravioleta, radiación infrarroja y la luz. En el campo de la biología los virus tienen tamaños variables entre 24nm como el virus de la fiebre aftosa hasta 300 nm como el virus de la viruela. Los ribosomas que son corpúsculos subcelulares miden 32 nm.

El Armstrong es una medida muy pequeña (0,0000000001 m) que permite expresar las distancias que hay entre las distintas partes de una molécula compleja cuando se muestra su estructura tridimensional. El alcance del microscopio electrónico va de 0,1 Ä a 100 mm.

Volver

2. Razones y Proporciones

Razón

La razón es la relación entre dos cantidades. Cuando éstos tienen la misma unidad de medida, la razón es un **cociente adimensional**.

Una Razón es el cociente entre dos cantidades (con magnitudes iguales o diferentes), que puede expresarse usando el formato de fracción:

$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{ antecedente} \\ \rightarrow \text{ consecuente} \end{array}$$

No confundir razón con fracción.
Si $\frac{a}{b}$ es una **fracción**, entonces a y b son **números enteros** con b$\neq$0, mientras que en la **razón** $\frac{a}{b}$ los números a y b pueden ser **decimales, incluso b puede ser cero.**

Ejemplo: Una partícula recorre 45 m en 15 s. La razón entre estas dos cantidades es

$$\frac{45m}{15s} = 3m/s.$$

Esto puede interpretarse como que la partícula recorre 3m en 1 seg.

Ejemplo: Un terreno rectangular tiene 12 m de frente y 48 m de fondo. La razón entre estas dos cantidades puede expresarse como

- $\frac{48m}{12m} = 4$, que puede interpretarse como que la medida del fondo es 4 veces la del frente, o
- $\frac{12m}{48m} = \frac{1}{4}$, que puede interpretarse como que la medida del fondo es 4 veces la del frente.

El hecho de que las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- Las razones comparan entre sí objetos que pueden ser heterogéneos (que se miden con unidades diferentes). Por ejemplo, 3 cuadernos por $145 se expresa como

$$\frac{3\ cuadernos}{\$145}$$

- Las fracciones, en cambio, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos partes de tres", lo que se indica con $\frac{2}{3}$.
- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.
- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede escribir como 4:7, o $4 \longrightarrow 7$.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:0, si es que hay 10 rojos y ningún verde (no se trata de hacer ninguna división por 0).
- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π , que sabemos no es racional. La razón entre el lado de un cuadrado de lado 1 y la longitud de la diagonal es $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que las fracciones son cociente de enteros.

Actividades

1) En una solución hay 5 l de alcohol y 15 l de agua. Calcula la razón entre las dos cantidades e interpreta el significado.

2) En 30 cm^3 de cierto material hay una masa de 20 kg. Calcula la razón entre las dos cantidades. ¿Qué indica este cociente?

3) En 5 kg de masa hay 5 g de leudante. Calcula la razón entre las dos cantidades e interpreta el significado

4) En 7 l de cierta solución hay 24.5 g de sustancia. Calcula la razón entre estas cantidades e interpreta el significado.

5) El cobre reacciona con el cloro para formar dos compuestos diferentes. El compuesto 1contiene 64.20g de cobre y 35.80g de cloro. El compuesto 2 contiene 47.27g de cobre y52.73g de cloro. ¿Cuál es la relación entre la masa de cobre y la masa de cloro para cada compuesto?

Proporción

Una proporción puede definirse como la igualdad entre dos razones.

Se dice que a, b, c y d forman una proporción si la razón entre a y b es la misma que entre c y d, es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*"

Recordemos la propiedad fundamental de las proporciones que establece que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a.d = b.c$$

Ejemplos

Los números 2, 5 y 8, 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20.

Es decir $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ porque $2.20 = 5.8$

La razón de chicos a chicas en una clase es de 2 a 3. Hay 12 chicos ¿cuántas chicas hay?

Solución: Como en la clase se mantiene la proporción planteamos $\frac{2}{3} = \frac{12}{x} \rightarrow \quad x = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18\, chicas$

Actividades

1) Resuelve planteando la proporción.
   a) La sucrosa es 51.50% de oxígeno. ¿Cuántos gramos de oxígeno hay en 20 gramos de sucrosa?

   b) Un mol de cierto gas ocupa 22, 4 litros. ¿Cuántos litros ocupan 107,19 moles?

2) Responde.

   a) Sabiendo que por cada 1000000 μm se tiene 100 cm ¿A cuántos cm equivalen 30 μm?
   b) Utilizando una relación conocida entre milímetros (mm) y Armstrong (Ä) ¿Cuántos Armstrong (Ä) mide un virus cuyo cuerpo mide 50 mm?
   c) Utilizando una relación conocida entre milímetros (mm) y nanómetros (nm) ¿Cuántos milímetros mide el virus de la fiebre aftosa que tiene un tamaño de 24 nm? ¿Y el virus de la viruela que mide 300 nm?.

Escala

Desde la Real Academia Española (RAE) se define la escala de la siguiente manera:

1. sucesión ordenada de valores distintos de una misma cualidad. Escala de colores, de dureza

2. línea recta dividida en partes iguales que representan metros, kilómetros, leguas, etc., y sirve de medida para dibujar proporcionadamente en un mapa o plano las distancias y dimensiones de un terreno, edificio, máquina u otro objeto, y para averiguar sobre el plano las medidas reales de lo dibujado.

3. tamaño de un mapa, plano, diseño, etc., según la escala a que se ajusta.

4. f. Fís. Graduación empleada en diversos instrumentos para medir una magnitud.

Desde el punto de vista matemático la **Escala** es la relación que existe entre la realidad y el dibujo que de ella se hace sobre el plano, es decir, se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad.

En **Geología**, considerando que todo trabajo de campo debe ser representado fielmente en planos, mapas o cartas, el concepto de escala como la relación que existe entre una distancia medida en el mapa y la correspondiente en el terreno, es de gran importancia.

La escala puede representarse:

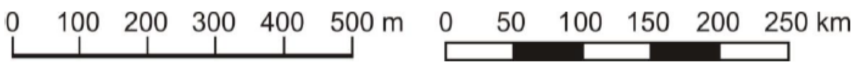
- Numéricamente:

Ejemplo:
Si 1 cm en el mapa equivale a 50.000 cm en el terreno se expresa mediante la relación 1:50.000.

La escala puede ser cualquiera, pero para mayor comodidad suele convenirse que el primer número de la relación sea siempre 1 (uno) y represente el valor correspondiente al mapa, mientras que el segundo represente las correspondientes distancias en el terreno.
Las escalas más usadas en geología son: 1:2.500; 1:5.000; 1:10.000; 1:25.000; 1:50.000.

- Gráficamente: puede ser Ordinaria o Transversal. La primera consiste en un segmento subdividido en partes, cada una de las cuales representa cierta longitud en el terreno.

Ejemplo:



En **Química** la escala se define en relación a temperatura, y otros fenómenos químicos.
Para medir temperaturas, se utilizan comúnmente en estudios científicos tres escalas: Celsius, Kelvin y Fahrenheit.
En el diccionario de Química Física, escrito por J.M. Costa se define: **Escala Celsius**: (*Celsius scale; échelle Celsius; Celsius-Skala; escala*

Celsius) Escala de temperaturas basada en la temperatura termodinámica -273.15K, que viene expresada en ºC.

La escala Celsius es la escala de temperatura cotidiana en la mayoría de los países, y se basa en la asignación de 0 al punto de congelación del agua y 100º al punto de ebullición de la misma, en el nivel del mar.

Históricamente la escala de temperatura **Kelvin** se basa en las propiedades de los gases. El cero en esta escala es la temperatura más baja que puede alcanzarse -273.15ºC (cero absoluto). Ambas escalas, Celsius y Kelvin, tienen unidades del mismo tamaño (un Kelvin tiene el mismo tamaño que un grado Celsius).

$K = {}^{o}C + 273.15$

El punto de congelación del agua en la escala de Kelvin es 273.15 K.

La escala utilizada en Estados Unidos es la **escala Fahrenheit**. En ésta el agua se congela a 32ºF y hierve a 212ºF.

Su relación con la escala de Celsius es: ${}^{o}C = 5/9\,({}^{o}F - 32)$

Actividad (para alumnos de Geología)

Resuelve los siguientes problemas:

1) Se dispone de una carta a escala 1:25.000. Sobre ella se ha medido una longitud de 18 mm ¿Qué longitud representa en el terreno? Exprese el resultado en metros, kilómetros, milímetros, pulgadas y pies.

2) Para representar un terreno se dispone de una hoja A4 (297 x 210 mm), con 3 cm de margen izquierdo. La porción de terreno a representar es de forma rectangular y tiene 400 m x 300 m. ¿Qué escala usarías?

3) La distancia en el terreno entre dos puntos A y B es de 3150 m ¿A qué distancia se hallarán en su representación en una carta 1:5.000?

4) ¿Qué distancia, medida en Km, representan 2 cm en cartas en escala 1:250.000; 1:300.000; 1:1.250.000; 3:1; 1:5; 1:5.000.000; 1:125; 1:100.

5) ¿Qué longitud tiene en el terreno un segmento de camino que mide 70 cm en una carta 1:50.000?

6) Dos puntos A y B, que están en el terreno a 22,5 km, distan 45 cm en la carta. ¿Cuál es la escala en la carta?

7) Dos puntos A y B que en el mapa están a 54 cm, distan 29 km en el terreno. ¿Cuál es la escala de la carta?

8) Se dispone de una carta escala 1:125.000 y sobre ella se ha medido una distancia de 6 mm. ¿Cuántos m representa en el terreno?

9) Dos puntos L y M están en el mapa a 50 mm y en el terreno a 500 Km. ¿Cuál es la escala del mismo?

10) El siguiente segmento representa 1200 km. ¿En qué escala está dibujado?

11) ¿En qué plano se puede ver con más detalle, en uno de escala 1:1.000 o en otro cuya escala es 1:1.000.000?

Volver

Actividad (para alumnos de Química)

a) Expresar las siguientes temperaturas en grados centígrados ó Kelvin según corresponda:

i. 356ºC:
ii. 38K:
iii. -36ºC
iv. 176K:
v. 25ºC:

b) La temperatura del nitrógeno líquido es de 77 K. ¿A cuántos grados centígrados equivale?

c) ¿Qué temperatura es más baja: 146 K ó -73 ºC?

d) El termómetro de mercurio de un médico está mal calibrado ya que indica erróneamente un valor de -2ºC para el punto de congelación del agua y 108 ºC para el punto de ebullición del agua.

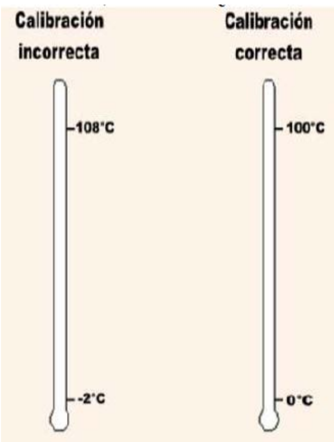


Fig. 12. Calibraciones

i) ¿Cuál será la temperatura centígrada verdadera cuando este termómetro indica que un paciente tiene una fiebre de 40 ºC?

ii) ¿Cuál será la única temperatura para la cual el termómetro indica un valor correcto?

e) Convertir las siguientes cantidades

i) 100ºF a grados centígrados

ii) 340 grados Fahrenheit a centígrados.

iii) 100ºC a grados Fahrenheit

iv) 360ºC a grados Fahrenheit

v) 100ºC a grados Kelvin

vi) 90ºC a grados Kelvin

vii) 50 grados Kelvin a grados Centígrados

viii) 300ºF a grados Kelvin

ix) 200 grados Kelvin a grados Fahrenheit

3. Densidad

El **concepto de densidad** es de mucha importancia en los campos de Química y Física.

La **densidad** (*d*) es la relación (razón) entre Masa (*m*) y Volumen (*v*) de una sustancia

$$d = \frac{m}{v}$$

En el Sistema Internacional la unidad más usual es el kilogramo por metro cúbico (kg/m^3), aunque frecuentemente también se expresa en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3). Para los gases suele usarse el gramo por decímetro cúbico (g/dm^3) o el gramo por litro (g/l).

La densidad es una propiedad intensiva ya que no varía con la cantidad de sustancia. Por ejemplo, la densidad del agua es de *1kg/l*. Si se tiene 10 gramos o 200 gramos de agua el valor de la densidad es el mismo ya que al aumentar la masa también aumentara el volumen y al hacer la división entre masa y volumen obtendremos el mismo valor de densidad.

La densidad también es un nexo muy importante para transformar masa a volumen o viceversa.

Si la densidad del agua es 1kg/l, expresarla en g/dm^3, g/cm^3 y g/l.

¿Qué volumen necesitamos para tener 30 gramos de ácido sulfúrico, si su densidad es 1,84 g/cm^3?

De esta manera medimos el volumen encontrado con una pipeta y tendremos la masa que nos habían pedido al inicio.

De la misma manera si nos pidieran cierto volumen de un sólido lo podríamos calcular con la densidad, ya que fijados la densidad y el volumen pesamos el sólido, lo cual es más fácil que medir su volumen.

¿Qué volumen ocupara una masa de 608 g de aluminio si su densidad es d=2,7 g/cm^3?

¿Qué masa tendrá un cubo de 0,1 m de lado hecho de corcho, si su densidad es d=0,14 g/cm^3?

Volver

4. Ecuación general de los gases (alumnos de Química)

Un gas ideal es aquél donde todas las colisiones entre átomos o moléculas son perfectamente elásticas, y en el que no hay fuerzas atractivas intermoleculares. Se puede visualizar como una colección de esferas perfectamente rígidas que chocan unas con otras, pero sin interacción entre ellas.

Este gas se caracteriza por tres variables de estado: la presión absoluta (P), el volumen (V), y la temperatura absoluta (T).

La ecuación que describe normalmente la relación entre ellas es:

$$PV = nRT$$

donde n es el número de moles, R es la constante universal de los gases $\left(R = 0{,}082\ \frac{l.Atm}{mol.k}\right)$ y T es la temperatura absoluta (en Kelvins).

Si en la ecuación que describe el gas ideal se fijan el volumen *V* y el número de moles *n,* despejar la presión *P* e indicar en función de qué variable se expresa.

El **mol** (símbolo: mol) es la unidad con que se mide la cantidad de sustancia, una de las siete magnitudes físicas fundamentales del Sistema Internacional de Unidades.

Dada cualquier sustancia (elemento o compuesto químico) y considerando a la vez un cierto tipo de entidades elementales que la componen, se define como un mol a la cantidad de esa sustancia que contiene tantas entidades elementales del tipo considerado, como átomos hay en 12 gramos de carbono-12.

Esta definición no aclara a qué se refiere cantidad de sustancia y su interpretación es motivo de debates, aunque normalmente se da por hecho que se refiere al número de entidades, como parece confirmar la propuesta de que a partir del 2011 la definición se basa directamente en el número de Avogadro (de modo similar a como se define el metro a partir de la velocidad de la luz).

El número de unidades elementales (átomos, moléculas, iones, electrones, radicales u otras partículas o grupos específicos de estas) existentes en un mol de sustancia es, por definición, una constante que no depende del material ni del tipo de partícula considerado. Esta cantidad es llamada número de Avogadro (NA) y equivale a: $6{,}023.10^{23}$ unidades elementales.

Un mol de un gas ideal ocupará un volumen de 22,4 l a TPE (temperatura y presión estándares, $0°\mathrm{C}$ y $1Atm$ de presión).

Ejemplo: Un recipiente cerrado de $2l$ contiene oxígeno a $200°\text{C}$ a $2Atm$.
Calcula (sabiendo que el peso atómico del oxígeno es 16),
Los gramos de oxígeno contenidos en el recipiente.
Las moléculas de oxígeno presentes en el recipiente.

Solución:
Aplicando la ecuación general de los gases, $PV = nRT$, tenemos

$$2Atm\,.2l = n\,.0{,}082\,\frac{l.Atm}{mol.k}\,.473K \quad (200°\text{C} \to 473K)$$

Entonces

$$n = \frac{2Atm\,.2l}{0{,}082\,\frac{l.Atm}{mol.k}\,.473K} = 0{,}1\ \text{mol}$$

Si lo planteamos como proporción

$$\frac{32\ g\ \text{de}O_2}{1\ \text{mol}} = \frac{x}{0{,}1\ \text{mol}}$$

Luego $$x = \frac{32\ g\ \text{de}O_2\,.0{,}1\ \text{mol}}{1\ \text{mol}} = 3{,}2\ g$$

Usando el NA y planteando una proporción,

$$\frac{6{,}023.\,10^{23}\ \text{moléculas de}\text{O}_2}{1\ \text{mol de}\text{O}_2} = \frac{x}{0{,}1\ \text{mol de}\text{O}_2}$$

Luego

$$x = \frac{6{,}023.\,10^{23}\ \text{moléculas de}\text{O}_2\ .\ 0{,}1\ \text{mol de}\text{O}_2}{1\ \text{mol de}\text{O}_2}$$
$$= 6{,}023.\,10^{23}\text{moléculas de}\text{O}_2$$

1) Tenemos $4{,}88\ g$ de un gas cuya naturaleza es SO_2 o SO_3. Para resolver la duda lo introducimos en un recipiente de $1\ l$ y observamos que la presión que ejerce a $27°C$ es $1{,}4\ Atm$. ¿De qué gas se trata?

2) Un mol de gas ocupa $25\ l$ y su densidad es $1{,}25\ g/l$ a una temperatura y presión determinadas. Calcula la densidad del gas a condiciones normales.

3) Un recipiente contiene $100\ l$ de O_2 y su densidad es $20°C$. Calcula la presión de O_2, sabiendo que su masa es de $3{,}43\ kg$.
El volumen que ocupará esa cantidad de gas en condiciones normales.

Actividades

1) Calcula el número de moles presentes en cada uno de los siguientes casos:
   i. 18 gr. agua;
   ii. 9,8 gr de H_2SO_4

2) En un recipiente se tienen 1,41 x 10^{24} moléculas de agua. Indica:
a) el número de moles de agua.
b) la masa total de agua.

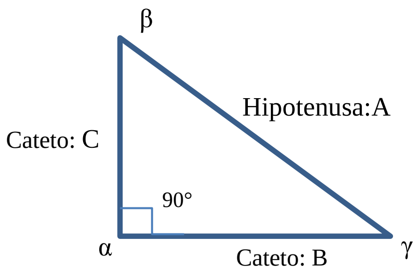
3) 0,75 moles de un gas inicialmente en condiciones estándar de presión y temperatura, se llevan a una presión de 500 mm de Hg y a una temperatura de 150°C. Calcula el volumen ocupado por el gas en esas condiciones.

Volver

5. Trigonometría (alumnos de Geología)

Triángulos rectángulos

Los elementos utilizados en la resolución de triángulos rectángulos son:



Para resolver completamente un triángulo rectángulo basta tener como datos:

a. un lado y un ángulo (no recto), o
b. dos lados.

La o las herramientas matemáticas que utilizamos dependen de los datos que tengamos.

Ellas son:

1) El principio de que la **suma de los ángulos de un triángulo** es 180º: Se utiliza para calcular la medida de un ángulo cuando se conoce la medida de los otros dos.

2) El **teorema de Pitágoras**.
Se utiliza para calcular la medida de un lado cuando se conoce la medida de los otros dos.

3) Las **razones trigonométricas**
Relacionan medidas de ángulos y lados de un triángulo rectángulo.

Las razones trigonométricas más usadas son:

$$sen\ \varphi = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$cos\ \varphi = \frac{cateto\ abyacente}{hipotenusa}$$

$$tg\ \varphi = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

"Resolver un triángulo" significa determinar el valor de todos sus lados y todos sus ángulos.

Teorema de Pitágoras.
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes B y C, y la medida de la hipotenusa es A, se establece que:

$$A^2 = B^2 + C^2$$

Donde φ es cualquiera de los ángulos agudos del triángulo.

Para el triángulo graficado:

$$sen\,\beta = \frac{B}{A} = cos\,\gamma$$

$$cos\,\beta = \frac{C}{A} = sen\,\gamma$$

$$tg\,\beta = \frac{B}{C}$$

$$tg\,\gamma = \frac{C}{B}$$

En todos los casos, es conveniente elaborar un croquis que represente la situación planteada, con los datos y las incógnitas.

Actividad 2: Resolver los siguientes problemas:

1) Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

2) Un avión que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de visión de 12º. ¿A qué distancia del pueblo se halla?

3) Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared de 4,33 m de altura que forma un ángulo de 60ºcon respecto al piso.

4) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54º. Encontrar la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.

5) Necesitamos conocer la altura de una colina. Si inscribimos el paisaje en un triángulo rectángulo, la hipotenusa (distancia en línea recta desde nuestra posición a la cima) mide 150 m y la distancia desde nuestra posición a la proyección horizontal de su punto más alto mide 120 m. Calcular la altura y la medida de los ángulos del triángulo rectángulo.

6) Desde lo alto de un acantilado de 45m de altura, los ángulos de visión de dos botes que están en el mar, en la dirección Norte del observador, son de 30º y 15º respectivamente. Determinar la distancia que separa los botes.

7) El ángulo de elevación del punto más alto de una barranca a una distancia de 90 m es de 30º. Calcular su altura.

8) Determinar el ángulo de elevación del sol cuando la sombra de un poste de 6 m de altura es de 1,732 m de largo.

9) A una distancia de 25,98 m del pie de una torre, el ángulo de elevación de su cúspide es de 30º. Determinar la altura de la torre y la distancia del observador a la cúspide.

Bibliografía

Chorny, F; Casares, P; Salpeter, C.; Legorburu, N. (coord), Schaposchnik, R. (coord). *Huellas Matemática 4*. Editorial Estrada.

Chorny, F; Salpeter, C; Casares, P; Majic, E. Legorburu, N. (coord), Schaposchnik, R. (coord). *Huellas Matemática 5*. Editorial Estrada.

De Simone, Turner. *Matemática: funciones y estadísticas*. A-Z Editora. Serie Plata.

Effenberger, P. (2012). *Matemática 4*. Kapelusz Editora S.A.

Godino, J. D. y Batanero, C. Proporcionalidad y su didáctica para maestros. (2003) (Documentos recuperables en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Schaposchnik, R. (coord.); Abdala, C; Garaventa, L.; Legorburu, N.; Turano, C. *Nueva Carpeta de Matemática 1*- IV. Aique Grupo Editor S.A.

Schaposchnik, R. (coord.); Abdala, C; Real, M.; Turano, C. Nueva Carpeta de Matemática 2- V. Aique Grupo Editor S.A.

Sobel M. y Lerner N. (1998). *Precálculo.* Quinta Edición. Prentice Hall Hispanoamericana. S.A. México.

Stewart, J.;Redlin, L.;Watson, S. (2012). *PRECÁLCULO. Matemáticas para el Cálculo.*ISBN: 978-0-8400-6807-1. Australia: Cengage Learning. 6ta Edición.

Sullivan, M. (1997). *PRECÁLCULO*. México: Prentice Hall. 1a ed.

Material de ingreso a carreras de Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales elaborados por:
Magallanes, A.; Zon, N. Ingreso Biología y Microbiología (2015).
Buffarini, F.; Barberis, P.; Denner, C.; Herrera M.I.; Magallanes, A.; Moschetti, E.; Palacio, G.; Picco, M; Rosso, A.; Zon, N. Navarro, V (2016).
Palacio, G.; Alturria Lanzardo, C.; Buri, L. (2017)

Volver