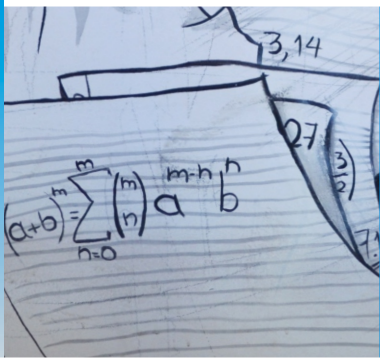
Integración a la Cultura Académica (ICA)
MICROBIOLOGÍA
Módulo Matemática

Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales

www.exa.unrc.edu.ar



Intregación a la Cultura Académica (ICA)
Módulo de Matemática

RESPONSABLE:

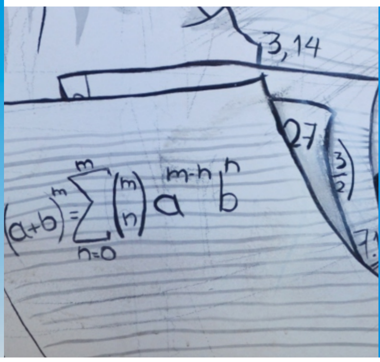
Mery Picco

Stefanía Demaría

Juliana Maldonado

Noelia Matos

Universidad Nacional de Río Cuarto
Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales



¿Cómo leer este material?

A lo largo del material encontrarán los siguientes iconos:

Actividad

Tareas, consignas, situaciones problemáticas.

Importante

Tener en cuenta, destacar, recordatorio, atención.

Reflexión

Interrogantes, planteos.

Ejemplo

Ilustración, aclaración.

Observación

Datos que explican o aclaran un tema.

Curiosidades

Detalles curiosos sobre la temática.

Desde el índice podrán acceder a través de los enlaces a cada uno de los temas que se detallan en el mismo.

Volver

Volver

Permite retornar al índice.

Este material ha sido elaborado en el marco del Programa de Ingreso, Continuidad y Egreso de Estudiantes en las carreras de pregrado y grado de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Res. Rec 380/15) y el proyecto Mediación de Materiales de Ingreso para las Carreras de la UNRC 2017-2019 "La Valoración Continua para Fortalecer los Procesos Educativos". (Res. Rec 785/17). UNRC- Secretaría Académica.

Índice

Introducción

Las matemáticas no son una invención del ser humano, sino que la propia naturaleza está repleta de números, fórmulas y funciones. Basta echar una ojeada a nuestro entorno para encontrarnos con el lenguaje armonioso de las Matemáticas: ¿Has observado alguna vez la forma de las celdillas de un panal de abejas? estos laboriosos insectos no tienen regla y compás para realizar sus labores de construcción, pero elaboran preciosos mosaicos hexagonales (6 lados) con la misma perfección de un geómetra. ¿Por qué esta manía por construir hexágonos? *"Las abejas, en virtud de cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material." Pappus de Alejandría. Siglo IV a.C.*Esta misma ordenación también la encontramos en otros muchos lugares: en el caparazón de una tortuga, en los pólipos coralinos, en las panochas de maíz o en las agrupaciones de percebes.

Muchos pueden creer que no les gusta la matemática pero la matemática es el lenguaje con el que está construido el universo.

Otro ejemplo lo encontramos en los pétalos de las flores: éstos siempre se disponen de tal manera que el ángulo que forman dos pétalos consecutivos es el número irracional φ=1,618033989... . Asombrosamente, si el ángulo no fuera éste, llegaría un momento en que los pétalos comenzarían a superponerse. Este número, conocido como número de oro o razón áurea aparece infinidades de veces en la naturaleza y determina nuestro ideal de belleza. Por ejemplo, en el rostro perfecto la relación entre la longitud y el ancho de la cabeza es φ; es decir la longitud de la cabeza es 1,618... veces mayor que el ancho. La misma proporción debe darse entre la longitud de la boca y la anchura de la nariz, etc.

Esperamos que estos breves ejemplos sirvan para mostrarte que para comprender la naturaleza necesitamos aprender a leer el lenguaje en el que está escrita.

En este módulo abordaremos los siguientes temas:

- Conjuntos Numéricos. Operaciones en R
- Razón. Proporción. Regla de tres simple
- Notación científica. Unidades de medida. Escala
- Factorización de polinomios. Ecuaciones

Volver

Tema 1: Conjuntos Numéricos. Operaciones en R

1) N = Conjunto de los Números Naturales

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,.......}

El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios. Este conjunto se caracteriza porque cada elemento tiene un **sucesor** y todos, **excepto el 1,** un **antecesor.** Si al Conjunto de los Números Naturales se le agrega el 0 (cero) se suele denotar

N_0 = { 0 , 1, 2, 3, 4, 5, 6,.....}

2) Z = Conjunto de los Números Enteros

Z = { ..... –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Conjuntos Naturales y Cardinales (por ejemplo: 5 – 20 = ¿?). Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un **punto simétrico**, situado a la izquierda del cero. Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él).

El Conjunto de los **Números Enteros** es la unión de tres subconjuntos :

$Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup N$ donde Z^{-} = Enteros Negativos.

3) Q = Conjunto de los Números Racionales

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Enteros. Por ejemplo, sólo se puede dividir en el conjunto de los Números Enteros **si** el **dividendo es múltiplo,** distinto de cero**, del divisor.** Para solucionar esta dificultad, se creó un nuevo conjunto de números, el cual está formado por todos los números de la forma **a / b,** donde **a (el numerador)** es un número entero y **b (el denominador)** es un número entero distinto de cero. Estos cocientes se denominan **FRACCIONES.** El conjunto de los **Números Racionales (Q) es el conjunto de todas las fracciones (o cocientes) entre dos números enteros:**

$Q = \{ a/b$ tal que a y $b \in Z$; y $b \neq 0 \}$

4) I = Conjunto de Números Irracionales

I = Conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos.

Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las **raíces inexactas, el número Pi ,** etc. A él pertenecen todos los **números decimales infinitos puros** , es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción. No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos que **sí pueden transformarse en una fracción.**

Ejemplos: 1,4142135....; 0,10200300004000005....

5) $\mathbb{R}$ = Conjunto de Números Reales

El conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$) está integrado por:

• El conjunto de los **Números Racionales** ($\mathbb{Q}$) que corresponden a la unión de todos los números cuya **expresión decimal** es **finita, infinita periódica** o **infinita semiperiódica.**

• El conjunto de los **números enteros** , positivos y negativos, más el **cero**

• El conjunto de los **Números Irracionales (I)** que está formado por la unión de todos los números que admiten una expresión infinita no periódica.

Entonces, se llaman **Números Reales** a todos aquellos que se pueden expresar en forma decimal finita o infinita; es decir, el conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$) está formado por los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$ unido con **I** .

La Figura 1 representa gráficamente la relación entre estos conjuntos numéricos. Podemos representarla gráficamente mediante diagramas de Venn:

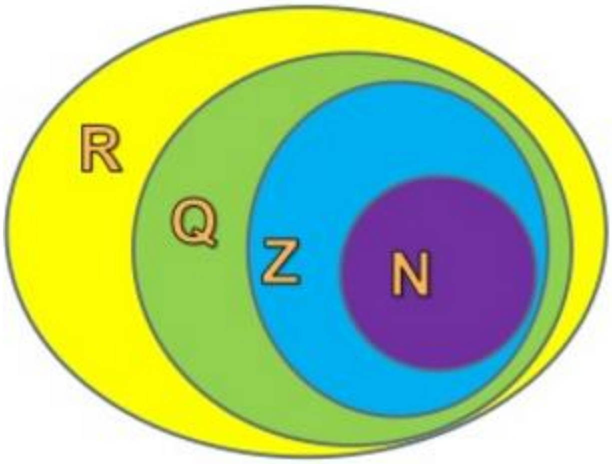


Fig. 1. Relación entre conjuntos numéricos

Actividades

1. Potenciación y radicación. Propiedades

A) Realiza las operaciones indicadas y responde verdadero o falso

- $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$
- $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$
- $(2:3)^2 = 2^2 : 3^2$
- $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
- $\sqrt{(-4)\cdot(-9)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$
- $\sqrt{4+9} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$
- $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$

La potenciación y la radicación NO son distributivas con respecto a la suma (resta), pero sí con respecto a la multiplicación (división).

B) Usando las conclusiones del inciso anterior, responde verdadero o falso.

- $(a+2)^2 = a^2 + 4 \quad \forall\, a$
- $(2a)^2 = 4a \quad \forall\, a$
- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \quad \forall\, a, b$

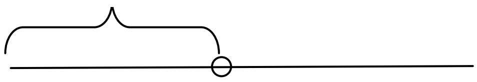
- $(2 \cdot h)^3 = 8h^3 \quad \forall\, h$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad$ con $a > 0$ y $b > 0$
- $\sqrt{2 \cdot x^2} = 2x \quad \forall\, x$
- $\sqrt{9 + x^2} = 3 + x \quad \forall\, x$
- $\sqrt{4 + b} = 2 + \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{1}{4a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \forall\, a > 0$
- $\sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2}$

2. Representa en la recta numérica las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{9}{2};\ \frac{4}{12};\ \frac{17}{4};\ -\frac{4}{3}$$

3. Fracciones equivalentes

$\frac{1}{2}$



un medio (1/2) es igual a

¿cuántos cuartos?

¿cuántos sextos?

¿cuántos octavos?

Las cuatro fracciones del inciso anterior representan el mismo número, por lo que se denominan **fracciones equivalentes.** ¿Cómo podemos obtener cada una de ellas a partir de la primera?

$$\frac{2}{4} \underset{x\,3}{\overset{x\,3}{=}} \frac{6}{12}$$

Fig. 2. Fracciones equivalentes

Para obtener una **fracción equivalente** a una dada, se multiplica o divide el numerador y el denominador de ésta por un mismo número.

4.A) Coloca el signo > ; < o = según corresponda, llevando a fracciones equivalentes en caso de ser necesario:

$$\frac{1}{9} \cdots\cdots \frac{15}{53} \cdots\cdots \frac{25}{32} \cdots\cdots \frac{76}{45} \cdots\cdots \frac{7}{2}$$

$$-\frac{5}{8} \ldots\ldots -\frac{3}{5}\frac{2}{5} \ldots\ldots \frac{12}{30}\frac{1}{3} \ldots\ldots\ 0.3$$

B) Sin realizar NINGUNA CUENTA coloca el signo > o < según corresponda:

$$\frac{123}{85} \ldots\ldots \frac{258}{325}$$

Simplificación de Fracciones

Simplificar (o reducir) fracciones significa hacer la fracción lo más simple posible. ¿Por qué decir cuatro octavos (4/8) cuando en realidad quieres decir la mitad (1/2)?. Simplificar una fracción consiste en transformarla en una fracción equivalente más simple. Reflexionar en este proceso te permitirá

Simplificar fracciones algebraicas (con letras en lugar de números). Observa el procedimiento para simplificar las siguientes fracciones:

- $\frac{36}{60} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

Los factores comunesson dos al cuadrado y tres. sidividimos numerador y denominador por este factor obtenemos la fracción simplificada .

- $\frac{6}{13} = \frac{2 \cdot 3}{13 \cdot 1}$

¡ no hay factor común¡ **NOSEPUEDESIMPLIFICAR**

Es decir, no se puede encontrar una fracción más simple que represente el mismo número.

> Para simplificar una fracción se factorizan (se expresan como producto de factores) el numerador y el denominador y luego se cancelan los factores comunes.

¿Es correcta la siguiente simplificación?

$$\frac{5}{8} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}+3} = \frac{1}{3}$$

Actividades

1. Simplifica las siguientes fracciones, en caso de ser posible:

- $\frac{x^2}{2x} =$
- $\frac{x(x+1)}{(x+1)^2} =$

- $\frac{x^2(x+2)}{x+2}$
- $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1} =$
- $\frac{3+\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2} =$
- $\frac{4x^2 \cdot a \cdot b^3}{2\, b \cdot a^2} =$

Operaciones con fracciones

Si bien siempre podemos usar la calculadora para resolver operaciones con fracciones numéricas, entender el concepto de fracción te servirá para resolver mentalmente operaciones sencillas, y reflexionar en los métodos de cálculo te permitirá desenvolverte con soltura cuanto se te presenten fracciones algebraicas.

Actividades

1. Suma de fracciones

A) Intenta realizar mentalmente las siguientes operaciones:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + 1 =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + 3 =$ $\qquad$ $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} =$

$\frac{1}{2} \cdot 2 =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} : 2 =$

B) Reflexiona en la manera como sumas fracciones numéricas y aplica el mismo método para sumar las fracciones algebraicas que aparecen al lado:

<u>Caso 1:</u>**Fracciones con igual denominador**

$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} =$ $\qquad$ $\frac{x}{5} + \frac{3x}{5} =$

$\frac{x}{2} + \frac{3}{2} =$ $\qquad$ $\frac{1}{x} + \frac{3}{x} =$

Para sumar dos o más fracciones **primero debemos transformarlas en fracciones equivalentes con igual denominador.**

<u>Caso 2:</u> **Fracciones con distinto denominador**

- $\frac{3}{2} + \frac{7}{4} =$

  $\frac{x}{2} + \frac{5x}{6} =$

  $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} =$

  $\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} =$

- $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} =$

  $\frac{x}{2} + \frac{5x}{3} =$

  $\frac{1}{x} + \frac{3}{2} =$

  $\frac{1}{3x^2} + \frac{3}{2} =$

C) Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

- $\frac{4+6}{2} = \frac{4}{2} + \frac{6}{2}$
- $\frac{h+v}{5} = \frac{h}{5} + \frac{v}{5}$
- $\frac{2+5x}{5} = \frac{2}{5} + x$
- $\frac{3x+1}{x} = \frac{3x}{x} + 1 = 4$

2. Producto de fracciones:

Reflexiona en la manera de multiplicar las fracciones numéricas y aplica el mismo método para multiplicar las fracciones algebraicas.

<u>Caso 1:</u> **Nada para simplificar**

- $\frac{3}{2}.\frac{1}{5}=$

  $\frac{x}{2}.\frac{5x}{3}=$

  $\frac{1}{x}.\frac{3}{2}=$

  $\frac{1}{3x^2}.\frac{1}{2}=$

<u>Caso 2:</u> **simplificando primero**

- $\frac{10}{15}.\frac{27}{50}=$

  $\frac{6}{x}.\frac{5x}{3}=$

  $\frac{1}{2x^2}.\frac{3x}{2}=$

  $\frac{4}{x}.\frac{x+1}{2}=$

El producto de fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones dadas y el denominador es el producto de los denominadores.

3. División de fracciones

En la Actividad 1 dijimos que $\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$ observa que esta división la podemos ver como una división de fracciones:

$$\frac{1}{2}:2=\frac{1}{2}:\frac{2}{1}=\frac{1}{4}$$

observa que el resultado es el mismo que se obtendría

al multiplicar $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.o sea que $\frac{1}{2}:2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

Dividir por una fracción es lo mismo que **multiplicar por la fracción inversa** (invertida)

Reflexiona en la manera de dividir fracciones numéricas y aplica el mismo método para dividir las fracciones algebraicas:

$\frac{6}{x}:\frac{3x}{5}=$

$\frac{2x^2}{x}:\frac{3x}{2}=$

$\frac{g+1}{m}:\frac{1}{m}=$

$$x : \frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} : x =$$

Intervalos

Consideremos dos números reales fijos *a* y *b*, con *a* < *b*.

Se llama *intervalo abierto* de extremos *a* y *b* al conjunto de los números reales *x* que están entre *a* y *b*, sin tener en cuenta los extremos. Se lo denota como *(a,b)*.

Gráficamente se lo representa en la recta numérica o recta real de la siguiente forma:

Fig. 2. Representación de un intervalo abierto en la recta

Un intervalo cerrado de extremos a y b, es el conjunto de los números reales x que están entre a y b, incluyendo los extremos. Lo denotamos como [a,b].

Gráficamente se lo representa en la recta numérica de la siguiente forma:

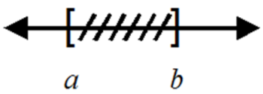


Fig. 3. Representación de un intervalo cerrado

Además de intervalos abiertos y cerrados podemos considerar los intervalos semi-abiertos.

La diferencia entre un intervalo abierto y uno cerrado es que el primero no contiene los valores extremos y el segundo sí.

Se llama intervalo ***abierto a la derecha*** de extremos a y b al conjunto de los números reales *x* tales que $a \leq x < b$ y se escribe $[a,b)$.

Gráficamente se lo representa en la recta numérica de la siguiente forma:

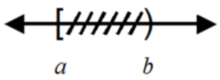


Fig. 4.Representación en la recta de un intervalo abierto a derecha.

Se llama intervalo ***abierto a la izquierda*** de extremos a y b al conjunto de los números reales *x* tales que $a < x \leq b$ y se escribe $(a,b]$.

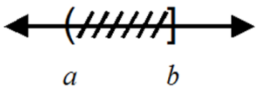


Fig. 5.Representación en la recta de un intervalo abierto a izquierda.

Actividades

1. Representa en símbolo y gráficamente:

   a) los números reales comprendidos entre -1 y 3 (sin incluir los extremos).

   b) los números reales mayores o iguales que tres y menores que cinco.

   c) los números reales cuya distancia a cinco es menor o igual que tres.

   d) los números reales mayores o iguales que tres.

   e) los números reales menores que uno.

El símbolo $+\infty$ se lee "mas infinito" y $-\infty$ se lee "menos infinito". No son números, son solamente símbolos para indicar que se consideran todos los números hacia la derecha (o hacia la izquierda) de un punto fijo a.

Volver

Tema 2: Notación Científica. Unidades de Medida. Escala

Notación científica

En las ciencias experimentales se manejan con frecuencia números muy pequeños y otros muy grandes. Dada la dificultad a la hora de trabajar con estos números es que se busca una manera más simple de expresarlos: la notación científica.

Actividades

1. Resolver las siguientes multiplicaciones. Puedes utilizar la calculadora si tienes dudas:

a) 6 . 10 000=	d) 6 . 100 000 =	g) 6 . 1 000 000=
b) 6,5 . 10000=	e) 6,5 . 100 000=	h) 6,5 . 1 000 000=
c) 2,54 . 10000=	f) 2,54 . 100 000 =	i) 2,54 . 1 000 000=

Rescribe las multiplicaciones anteriores usando potencias de diez:

a) 6 . 10 000= 6. 10^4=60000 (por ejemplo)

b) 6,5 . 10000= -----------------

e) 6,5 . 100 000= -----------------

i) 2,54 . 1 000 000= ----------------

¿Qué efecto provoca en un número decimal la multiplicación de ese decimal por una potencia de 10 de exponente natural?

____

____

____

2.Observa las siguientes divisiones:

a) 6 : 10000= 0,0006

b) 6,5 : 10000= 0,00065

c) 65,4 : 10000= 0,00654

d) 6 : 100 000 = 0,00006

e) 6,5 : 100 000= 0,000065

f) 65,4 : 100 000 = 0,000654

g) 6 : 1 000 000= 0,000006

h) 6,5 : 1 000 000= 0,0000065

i) 65,4 : 1 000 000= 0,0000654

¿Qué efecto provoca en un número decimal la división de ese decimal por una potencia de 10?

____

____

____

3. Indica si es verdadero o no el siguiente razonamiento:

$$6{,}5 : 1000000 = 6{,}5.\frac{1}{1000000} = 6{,}5.\left(\frac{1}{10}\right)^{6} = 6{,}5.10^{-6}$$

Escribe las divisiones de la actividad 2 como multiplicaciones por potencia de diez.

a) 6 : 10 000=
b) 6,5 : 10000=
c) 65,4 : 10000=
d) 6 : 100 000 =
e) 6,5 : 100 000=
f) 65,4 : 100 000 =
g) 6 : 1 000 000=
h) 6,5 : 1 000 000=
i) 65,4 : 1 000 000=

¿Qué efecto provoca la multiplicación de un número decimal por una potencia de diez de exponente un entero negativo?

4. Completa los espacios vacíos con una potencia de diez para que se mantenga la igualdad entre las expresiones dadas:

a) 60 000 000 000 = 6 . 10...... = 60 . 10...... = 0,6 . 10......

b) 150 000 000 000 = 1,5 . 10...... = 150 . 10...... = 0,15 . 10......

c) 24 100 000 000 = 2,41 . 10...... = 24,1 . 10...... = 0, 0241 . 10......

d) 0,00009 = 9 . 10...... = 0,9 . 10...... = 0,09 . 10......

e) 0,000 000 037 = 3,7 . 10...... = 37 . 10...... = 0,37 . 10......

f) 0,000 000 002 04 = 2,04 . 10...... = 0,204 . 10...... = 204 . 10......

5. Verifica cómo la calculadora expresa los números del ejercicio anterior y extrae alguna conclusión:

¿Qué diferencia encuentran entre la escritura de números muy grandes o muy pequeños? ¿Por qué piensan que es así?

Notación científica

Es una determinada forma de escritura de números decimales, se dice que se está utilizando esta notación cuando el número es escrito de la forma $d.\ 10^n$, dónde "d" es un número decimal entre 1 y 10, y "n" es un número entero.

6. Expresa los siguientes números en notación científica

a) 26 000000000000=

b) 108000000000000000=

a) 0,0000000000026 =

b) 0,00000000000000108=

7. Escribí los números que representan las siguientes expresiones:

a) $5{,}84\ .10^6$ =

b) $1{,}3\ .10^7$ =

c) $6\ .10^{-8}$ =

d) $8{,}15\ .10^{-5}$ =

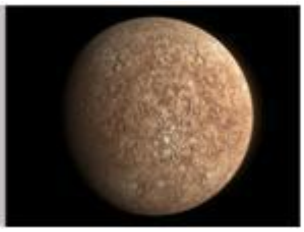
8. Ordena los siguientes números de menor a mayor sin hacer las cuentas y explica cómo lo realizaste:

a) 3.10^4 3.10^{-4} 3.10^{-14} 3.10^{41} 3.10^{14} 3.10^{-41}

b) 26.10^{-8} 29.10^{-8} 25.10^8 36.10^{-7} 35.10^7

9. Lee el siguiente extracto de una nota científica y responde:

En el día de la fecha, Mercurio se encuentra a una distancia aproximada de $5{,}791\ .\ 10^7$ km del Sol, mientras que Neptuno está ubicado a una distancia aproximada de $4{,}5043\ .\ 10^9$ km del Sol.



a) ¿Cuál de los dos planetas está más cerca del sol? Explica cómo te diste cuenta.

b) Analiza las escrituras de las distancias de los planetas al Sol en el artículo ¿Cómo se expresan?

c) Lee ahora el siguiente artículo. El tamaño del diámetro de los glóbulos rojos y blancos de la sangre es muy pequeño. ¿Cómo se expresan esos valores?

La sangre está formada, entre otras cosas, por glóbulos rojos y glóbulos blancos.
Los glóbulos rojos de la sangre son de un tamaño estándar de aproximadamente 6 a $8.\ 10^{-4}$ cm de diámetro. En cambio, los glóbulos blancos tienen un tamaño que oscila entre 8 y $20.\ 10^{-4}$ cm.

d) ¿Cuáles son más grandes, los glóbulos blancos o los glóbulos rojos? ¿Cómo te diste cuenta?

e) Los artículos científicos utilizan este modo de expresar los valores numéricos muy grandes o muy pequeños. ¿Por qué piensan que lo hacen?

Unidades de medida

A nosotros nos interesan los submúltiplos del metro porque los elementos con los que trabajan las ciencias biológicas experimentales tienen dimensiones por debajo del metro. Por ejemplo las células, las bacterias, los virus y las moléculas.

Actividades

1. Recordemos que una fracción puede representar una parte de un entero. Así, por ejemplo, un metro es la milésima parte de un kilómetro.

$$1\ \text{m} = \frac{1}{1000}\ km = 0{,}001\ km = 10^{-3}\ km$$

A partir de ello contesta:

a) Si un decímetro (dm) representa la décima parte de un metro (m), entonces:

1 dm = —m = 10 ···· m   10 ···· dm = 1 m

b) Si un centímetro (cm) representa la centésima parte de un metro, entonces:

1 cm = —m = 10 ···· m   10 ···· cm = 1 m

c) Si un milímetro (mm) representa la milésima parte de un metro, entonces:

1 mm = —m = 10 ···· m   10 ···· mm = 1 m

d) Si un micrómetro (μm) representa la millonésima parte de un metro, entonces:

1 μm = —m = 10 ···· m   10 ···· μm = 1 m

* Siguiendo con este razonamiento es posible expresar:

1 nanómetro (nm) = $\frac{1}{10^9}$ m = 10^{-9} m

1 armstrong (Ä) = $\frac{1}{10^{10}}$ m = 10^{-10} m

1 picómetro (pm) = $\frac{1}{10^{12}}$ m = 10^{-12} m

Haciendo una síntesis de lo hecho anteriormente podríamos expresar:

1 m = 10^2 cm = 10^3 mm = $10^6 \mu$m = 10^9nm = 10^{10}Ä = 10^{12} pm

Para darnos una idea veamos en forma comparativa el tamaño de los seres humanos, las células, las bacterias, los virus, las moléculas, etc.

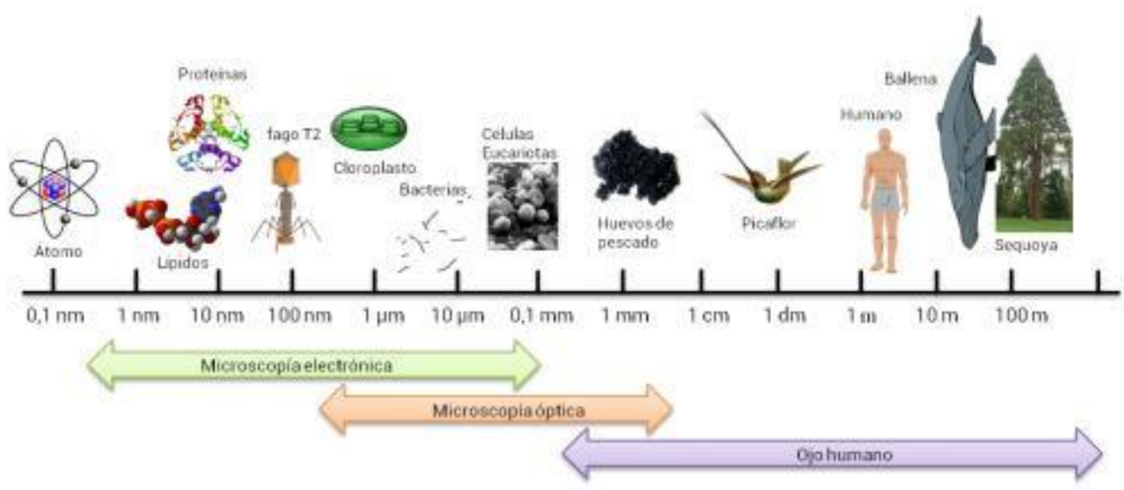


*Fig. 6.T*amaños relativos de distintos objetos (incluidos los seres humanos) y los instrumentos necesarios para detectarlos.

2. Teniendo en cuenta las relaciones anteriores responde las siguientes preguntas:

a) ¿A cuántos centímetros (cm) equivale 1 micrómetro (μm)?

b) ¿A cuántos amstrong (Ä) equivale 1 milímetro (mm)?

c) ¿A cuántos milímetros (mm) equivale 1 nanómetro (nm)?

3.a) Sabiendo que por cada 1000000 μm se tiene 100cm¿ A cuántos cm equivalen 30 μm?.

b) Utilizando una relación conocida entre milímetros (mm) y Armstrong (Ä); un virus cuyo cuerpo mide 50 mm, ¿cuántos Armstrong (Ä) mide?

c) Utilizando una relación conocida entre milímetros (mm) y nanómetros (nm); ¿Cuántos milímetros mide el virus de la fiebre aftosa que tiene un tamaño de 24 nm? ; y ¿Cuántos milímetros mide el virus de la viruela que tiene 300 nm?.

Tema 3: Razón. Proporción. Regla de tres simple. Porcentaje.

Razón

Una Razón es el cociente entre dos cantidades de magnitudes (iguales o diferentes), el cual se puede expresar usando el formato de fracción:

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \rightarrow & \text{antecedente} \\ \rightarrow & \text{consecuente} \end{matrix}$$

Si el antecedente y el consecuente tienen la misma unidad de medida, la razón es un cociente adimensional e indica la relación entre el antecedente y el concecuente.

Ejemplo: La razón en los lados de un rectángulo de 5 cm de altura y 10 cm de base es $\frac{10}{5}$. Esta división da como resultado 2, lo cual significa que la base es "dos veces" la altura (el doble). ¿Qué pasaría si hubiéramos hecho la división al revés?

Si el antecedente y el concecuente tienen diferentes unidades de medida, la razón expresa la cantidad de la magnitud del antecedente por unidad del consecuente.

Ejemplo: una partícula recorre 45 m en 15 s. La razón entre estas dos cantidades es $\frac{45\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{s}} = 3\ \mathrm{m/s}$

El hecho de que las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “dos de tres partes”, lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.

- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o4 $\longrightarrow$ 7.

- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).

- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional. La razón entre el lado de un cuadrado de lado 1 y la longitud de la diagonal es $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

No confundir razón con fracción.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción, entonces a y b son números enteros con b≠0, mientras que en la **razón** los números a y b pueden ser **decimales, incluso b puede ser cero.**

Actividades

1. En una solución hay 5 L de alcohol y 15 de agua. Calcula la razón entre las dos cantidades e interpreta el significado.
2. En 30 cm^3 de cierto material hay una masa de 20 kg. Calcula la razón entre las dos cantidades. ¿Qué indica este cociente?
3. En 5 kg de masa hay 5 g de leudante. Calcula la razón entre las dos cantidades e interpreta el significado
4. En 7 L de cierta solución hay 24.5 g de sustancia. Calcula la razón entre estas cantidades e interpreta el significado.

Proporción

Una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos razones. Los números *a, b, c* y *d* forman una **proporción** si la razón entre *a* y *b* es la misma que entre *c* y *d*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*"

Ejemplos

- Los números 2, 5 y 8, 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20. Es decir

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

- La razón de chicos a chicas en una clase es de 2 a 3. Hay 12 chicos ¿cuántas chicas hay?

Solución: Como en la clase se mantiene la proporción planteamos

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{x} \rightarrow \quad x = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18\ chicas$$

Actividades

1. Resuelve planteando la proporción:

a) Si 32 g de O_2 equivalen a un mol O_2 ¿cuántos gramos de O_2 hay en 0.1 mol?

b) Si 6,023 $.10^{23}$ moléculas de O_2 son un mol de O_2, ¿cuántas moléculas hay en 0.1 mol de O_2 ?

c) Un mol de cierto gas ocupa 22, 4 litros. ¿cuántos litros ocupan 107,19 moles?

Proporcionalidad y regla de tres simple

En 50 litros de agua de mar hay 1300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5200 gramos de sal?
Como las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son **directamente proporcionales**, se verifica la proporción:

$$\frac{50}{1300} = \frac{x}{5200}$$

de donde resulta:

$$x = \frac{50.5200}{1300} = 200$$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} En\ 50\,l\ hay\ 1300\,g\ de\ sal \\ En\ x\,l\ habrá\ 5200\,g\ de\ sal \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 50\,l \_\_\_\_ 1300\,g \\ x\,l \_\_\_\_ 5200\,g \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{50.5200}{1300} = 200$$

Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de **regla de tres simple directa**.

Porcentaje

Los porcentajes son una forma de presentar información numérica. Se utilizan en muchas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo: los negocios los utilizan para informar el descuento que tendrá un determinado producto, en la preparación de mezclas de ciertas sustancias, etc. Los diarios están llenos de estadísticas presentadas en forma porcentual.

Un porcentaje es el número de partes que se toman de un todo que se ha dividido en 100 partes iguales.

El 1% de un todo es su centésima parte, es decir cada una de las partes que se obtienen al dividir el todo en 100 partes iguales. Por ejemplo,

- si en 80 L de una solución hay un 1% de ácido ¿cuántos litros de ácido hay?

Respuesta: Debemos calcular el 1% de 80 L

$$1\%\ de\ un\ todo = \frac{el\ todo}{100}$$

$$1\%\ de\ 80\ L = \frac{80\ L}{100} = 0{,}8\ L$$

- si en 80 L de una solución hay un 4 % de ácido ¿cuántos litros de ácido hay?

Respuesta: Debemos calcular el 4 % de 80 L. El 4% de un todo se consigue dividiendo ese todo en 100 partes iguales y tomando 4 de esas partes. Ya dijimos que la centésima parte (1%) de 80 L es 0,8 L, luego 4 centésimas partes (4 %) se obtienen multiplicando 0,8 por 4, lo cual da 3,2 L. Observa que la cuenta que realizamos para calcular el 4% de 80 es

$$\mathbf{4}\ \%\ de\ un\ todo = \frac{el\ todo}{100} \cdot \mathbf{4}$$

$$4\%\ de\ 80\ L = \frac{80\ L}{100} \cdot 4 = 3{,}2\ L$$

Para mecanizar el procedimiento de cálculo de un porcentaje, podemos reescribir la cuenta anterior:

$$\mathbf{4\ \%\ de\ 80} = \frac{80 \cdot 4}{100} = \frac{\mathbf{320}}{\mathbf{100}} = \mathbf{3,2}$$

Para calcular el a % de una cantidad x podemos multiplicar el porcentaje por la cantidad y luego correr la coma decimal dos lugares hacia la izquierda (lo que es equivalente a dividir por 100)

Ejemplo

Para calcular el 5% de 120 hacemos 120 x 5=600 y luego corremos la coma dos lugares hacia la izquierda. Es decir el 5% de 120 es 6.

Para calcular el 20% de 120 podríamos multiplicar 120 por 20 y luego correr la coma dos lugares, pero más fácil es multiplicar 120 por 2 y correr la coma un solo lugar: 120 x 2=240. corriendo la coma un lugar queda que el 20% de 120 es 24.

Otra forma de reescribir la cuenta anterior sería:

$$\mathbf{4\ \%\ de\ 80} = 80 \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{100}} = 80 \cdot \mathbf{0.04} = \mathbf{3,2}$$

Para calcular el a % de una cantidad x podemos multiplicar dicha cantidad por el decimal correspondiente a la fracción $\frac{a}{100}$

Por ejemplo, para calcular el 35% de 45 hacemos 45 .0.35=15.75

Actividades

1. Calcula mentalmente los siguientes porcentajes:

a) El 4% de 2 =

b) El 7% de 6 =

c) El 20% de 35 =

d) El 30% de 150=

e) El 7% de 60=

2. Calcula los siguientes porcentajes usando calculadora si prefieres, pero NO REGLA DE TRES:

a) 39% de 143 =

b) 15% de 259=

c) 7% de 790=

3. Algunos porcentajes especiales

a) ¿Qué parte es el 50% de un todo y por qué? ¿cómo calculamos el 50% de un todo de manera rápida?

b) ¿Qué parte es el 25% de un todo y por qué? ¿cómo calculamos el 25% de un todo de manera rápida?

c) ¿Qué parte es el 20% de un todo y por qué? ¿cómo calculamos el 20% de un todo de manera rápida?

b) ¿Qué parte es el 75% de un todo y por qué? ¿cómo calculamos el 75% de un todo de manera rápida?

4. Usando los resultados de la Actividad anterior, calcula los siguientes porcentajes:

a) 50% de 288 =

b) 25% de 36=

c) 20% de 150=

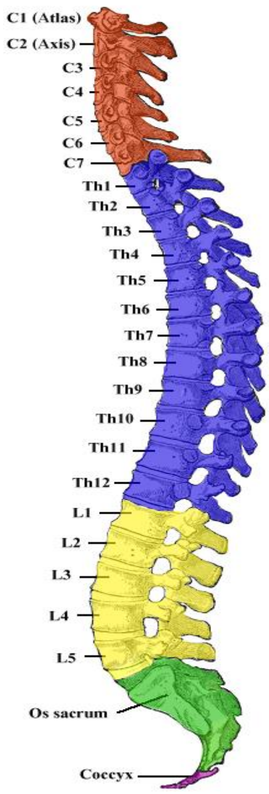
d) 75% de 16 =

¿Cómo calculamos qué porcentaje representa una cantidad?

Si queremos calcular qué porcentaje representa por ejemplo 63 de 84, podemos plantear una ecuación. Necesitamos averiguar el porcentaje, entonces lo llamamos x, y por lo visto hasta el momento si hacemos $\frac{84}{100}\,x = 63$, despejando de aquí x, tenemos que x = 75. Por lo tanto 63 representa el 75 % de 84.

5. La espina dorsal humana está formada por un grupo de huesos (vértebras) como se muestra en la figura.

- Región cervical (7 vértebras, C1-C7)
- Región torácica (12 vértebras, T1-T12)
- Región lumbar (5 vértebras, L1-L5)
- Región sacra (5 vértebras, S1-S5)
- Región coxígea (4 vértebras, inconstantes)



a) ¿Qué porcentaje de las vértebras pertenece a la región lumbar?

b) ¿Qué porcentaje de las vértebras son cervicales?

c) ¿Qué porcentaje de las vértebras son torácicas?

6.El prensado de 1.5 Kg de aceitunas produjo el 36% de su peso en aceite. Calcula la cantidad de aceite obtenida.

7. Una molécula de dióxido de azufre, SO_2, contiene un átomo de azufre y dos de oxígeno. Calcular la composición en tanto por ciento de dicha molécula, sabiendo que la masa atómica del azufre es 32,1u y la del oxígeno, 16,0 u.

Escala

El microscopio es un instrumento diseñado para hacer posible la observación y el examen de objetos muy pequeños, los cuales no podrían ser vistos sin la ayuda de lentes amplificadores.

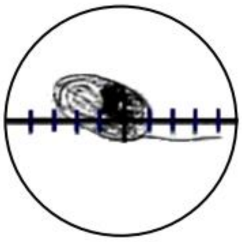
Es importante conocer el grado de aumento, que es la magnificación total que sufre la imagen del objeto debido al efecto de los lentes oculares y objetivos. Los lentes oculares normalmente tienen un aumento de 10X, esto quiere decir que amplifica la imagen 10 veces su tamaño normal. En cuanto a los objetivos, hay de dos tipos, los de observación en seco, que por lo general tienen un aumento que varía entre 4X y 45X y los de inmersión de 90X 0 100X.

El grado total de aumento se obtiene multiplicando el número de veces que aumenta el lente ocular por el número de veces que aumenta el lente objetivo. Ejemplo: Si el ocular aumenta 10 veces , y el objetivo aumenta la imagen 40 veces, la magnificación total es este caso será de 10 x 40 = 400 , es decir, se amplificará 400 veces la imagen.

De esta manera, podemos ver una célula a un aumento de hasta 1000X con un microscopio óptico, pero no podemos calcular su tamaño real con tan sólo mirarlas. Sin embargo, podemos estimar su tamaño con precisión haciendo un poco de matemáticas.

Actividades

1.Supongamos que vemos un organismo en el microscopio con un tamaño aparente de 0,4mm, y que el aparato está equipado con un objetivo de 20X y un ocular de 10X. ¿Cuál es el tamaño real del organismo?



2. Si dispusieras de un microscopio óptico con objetivos de 4X, 10X, 40X y 100X ¿Cuáles de las siguientes estructuras u organismos podrías visualizar y con qué objetivos?

a) Virus de la gripe (tamaño aproximado 0,1μm)
b) Linfocitos (tamaño entre 9 y 18μm)
c) Mitocondria (tamaño entre 0,5 y 1μm)
d) Cromosomas (tamaño entre 0,2 y 5 μm)

Los objetos que se hallan fuera del límite de resolución del ojo humano son aquellos cuyo tamaño es inferior a 0.1mm

Volver

Tema 4: Factorización de polinomios. Ecuaciones

Un polinomio está factorizado cuando está expresado como producto de otros polinomios de menor grado.

Así por ejemplo, el polinomio p(x)= x^2-2.x+1 se puede factorizar

como p(x)=(x-1).(x-1) . ¿Cómo lo comprobarías?

La factorización es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones que involucran polinomios. Por ejemplo es muy fácil resolver la ecuación (x+3).(x-5)=0, ya que para que un producto sea cero, alguno de las factores debe ser cero. Con este razonamiento podemos encontrar fácilmente la solución de esta ecuación (¿cómo?)

Si se tiene un polinomio factorizado igualado a cero, es muy fácil encontrar la solución a la ecuación.

Actividades

1. dadas las siguientes ecuaciones, encuentre el conjunto solución:

a) (x+1)(x-3)(x-5)=0
b) 0,3x(x+3)(x-2)=0
c) -1,2(x+2)(x-5)=0
d) $(x-1)^2(x+\sqrt{5})=0$

La pregunta que se nos presenta entonces es

¿Cómo factorizar un polinomio?

Revisaremos algunos **Métodos**:

Factor Común

Si se tiene un polinomio en el cual todos sus términos tienen un factor común, este se puede extraer.

Ejemplo: $p(x)=2.x^4+6.x^2-4.x^3$, el factor $2.x^2$ está presente en todos los términos, con lo cual se puede extraer. Así $p(x)=2.x^2.\ (x^2+3-2x)$. De esta forma p(x) quedó expresado como un producto de dos polinomios de grado 2, por ello, quedó factorizado.

En general: el método consiste en aplicar la propiedad distributiva:

$$\boxed{a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a\,(b + c + d)}$$

Factor Común Por Grupo

Si se nos presenta un polinomio cuya cantidad de términos es par, podemos agrupar y sacar factor común dos veces. Veamos un ejemplo:

$$Q(x)=\underbrace{10x^5+2x^3}+\underbrace{15x^2+3}$$

$$2x^3(5x^2+1)+3(5x^2+1) \quad \leftarrow \text{Factor}$$

$$(5x^2+1)(2x^3+3) \quad \leftarrow \text{Factor}$$

De esta manera, Q(x) quedó factorizado como un producto de un polinomio de grado 2 y otro de grado 3.

Diferencia De Cuadrados

Cuando se tiene un polinomio compuesto por una diferencia entre dos términos, y estos pueden ser expresados como el cuadrado de otra expresión, decimos que se puede factorizar de la siguiente manera

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Ejemplo

$R(x)=25x^6-\frac{1}{4}$

Como $25x^6= (5x^3)^2$ y $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, entonces

$R(x)= (5x^3-\frac{1}{2}).(5x^3+\frac{1}{2})$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Cuando un polinomio (ordenado) tiene 3 términos con las siguientes características:

1) Los términos de los extremos tienen el mismo signo y son el cuadrado de sendas expresiones.

2) El término del medio es el doble del producto entre estas expresiones.

Se puede utilizar este método. En símbolos,

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$$\boxed{a^2 \pm 2\, a\, b + b^2 = (a \pm b)^2}$$

Ejemplos:

1.

$$9+6x+x^2=(3+x)^2$$

$$\begin{array}{ccc}\downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 3^2 & 2\cdot 3\cdot x & x^2\end{array}$$

2.

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$$\begin{array}{ccc}\downarrow & \uparrow & \downarrow \\ x^2 & 2\cdot x\cdot 2 & 2^2\end{array}$$

Actividades

1. Factorizar los siguientes polinomios, utilizando algunos de los métodos estudiados anteriormente, y eligiendo el más conveniente:

a) x^4-x^3+x-1

b) $x^3+2x^2-9x-18$

c) $4x^3-2x^2+6x-3$

d) d) $2x^3-6x+x^2$

e) $10x^3+15x^2$

f) x^2-4x+4

g) $-x^3+16x$

h) $x^3+3x^2-4x-12$

i) $25x^3+50x^2-x-2$

j) x^3+x^2-4x-4

2. La altura sobre el nivel del mar a la que vuela un globo aerostático está modelado por la siguiente expresión:

$$\boxed{A=t^3-10t^2+25t}$$

Donde t representa los días de viaje.

a) ¿A qué altura estará el globo a los 3 días de viaje?

b) ¿El globo alguna vez volvió a tocar el suelo? Justifica

c) ¿Estuvo el globo en algún momento a 250 m sobre el nivel de mar? ¿Por qué?

3.Un meteorólogo registró que la temperatura, en grados centígrados, durante el transcurso de un día estaba determinada por la expresión T=0,05x(x-12)(x-24), donde x es el tiempo medido en horas y x=0 corresponde a las 6 a.m.

¿cuál fue la temperatura a las 13hs? Justifica

¿ en qué momentos del día la temperatura fue de 0°c? Explica

4. simplifica las siguientes expresiones racionales algebraicas

a) $\frac{x^2-4}{(x+2)(x-3)(x+1)}$

b) $\frac{3x^2+6x+3}{3x^2-3}$

c) $\frac{y^4-1}{y^3-y^2+y-1}$

d) $\frac{3a^2+6a}{3a^3-3a^2-12a}$

e) $\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^3-2x^2-3x+6}$

Aplicaciones de ecuaciones a problemas de química

Aplicación 1: Ecuación General de los gases

El modelo que relaciona la presión, el volumen, la temperatura y el número de moles es el siguiente:

$$PV = n\mathrm{RT}$$

Donde R es la constante de los gases y siempre vale lo mismo

Tener en cuenta que:
*1 atm = 760 mm de Hg
* ^{0}K = ^{0}C +273*
°F=1.8.°C+32

R = $0.082\frac{litos.\ atm}{mol.°K}$. La temperatura siempre es absoluta, se mide en Kelvin.

Muchos de los problemas de la química en los que aparece esta igualdad implican resolver una ecuación:

Ejemplo

Se tienen 0,75 moles de un gas inicialmente en condiciones estándar de presión y temperatura, se llevan a una presión

de500 mm de Hg y a una temperatura de 150°C. Calcular el volumen ocupado por el gas en esas condiciones.

760 mm de Hg___1 atm
500 mm de Hg___= 0.66atm

Como sabemos, P.V=n.R.T, luego

V=$\frac{n.R.T}{V} = \frac{0.75moles\ .\ 0{,}082\frac{litros.atm}{mol.°k}\ .\ 423\ °K}{0.66\ atm}$

$$= \frac{0.75\cancel{moles}\ .\ 0{,}082\frac{litros.\cancel{atm}}{\cancel{mol}.\cancel{°k}}\ .\ 423\ \cancel{°K}}{0.66\ \cancel{atm}}$$

=26.01 litros.

Actividades

1. si se conoce la presión, el número de moles y la temperatura, ¿Qué expresión tendrá el volumen?

¿cuál es la expresión para la temperatura?¿Cuál es la expresión para el número de moles? ¿siempre puedes encontrar esta expresión o hace falta alguna condición?

Aplicación 2: Densidad

La densidad es una magnitud escalar referida a la cantidad de masa en un determinado volumen de una sustancia. El modelo que relaciona la densidad de una sustancia, la masa y el volumen de la misma es

$$\boxed{\delta = \frac{m}{V}}$$

Muchos de los problemas de la química en los que aparece esta igualdad implican resolver una ecuación:

Ejemplo:

¿Cuál es la densidad de un material, si 30 cm^3 tienen una masa de 600 gr?

Solución:

De los datos del problema sabemos que:

m = 600 gr.

$V = 30\ cm^3$

Entonces reemplazando en la fórmula:

$\delta = m / V$

$\delta = 600\ gr / 30\ cm^3$

$\delta = 20\ gr / cm^3$

Actividad

1.a) La densidad del agua es 1.0 g/cm3, ¿cuál es la masa de 6 litros de agua?

b) La densidad del Cobre es 8.9 g/cm^3¿Qué volumen ocupara una masa de 500 gr?

c) La densidad del aire es 0.00129 g/cm^3 ¿Qué volumen ocupara una masa de 10000 gr?

d) Un trozo de material tiene un volumen de 2 cm^3 si su densidad es igual 2.7 gr / cm^3 ¿Cuál es su masa?

Volver

Bibliografía

1. Bocco, Mónica. (2008). "Elementos de Matemática con aplicaciones a las Ciencias de la Vida". SIMA Editora-Córdoba. ISBN: 978-987-1253-36-9.

2. Leithold, Louis (1998). "Matemáticas Previas al Cálculo. Funciones, Gráficas y Geometría Analítica". Tercera Edición. Editorial Oxford UniversityPressHarla. México.

3. Stewart, James; RedlinLothar y Watson Saleem. (2007). "Précalculo. Matemática para el cálculo". Editorial Thomson Learning. Quinta Edición. ISBN: 13-978-970-686-638-7, ISBN: 10-970-686-638-8.

4. Sullivan Michael (1997). "Precálculo". Cuarta Edición Editorial Prenctice-Hall. ISBN: 968-880-964-0.